Der Teichmüller-Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$

Andrei Duma

1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546016_0090

Dissertationsdruck- und Verlagsanstalt
Werner Blasaditsch Augsburg Theodor-Heuß-Platz 3
Printed in Germany

Der Teichmüller-Raum der Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Andrei Duma
aus Petroşani

am 4. November 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Stein

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Mai 1972

MEINEN ELTERN

EINLEITUNG

Schon Riemann (1857) hat vermutet, daß die Gesamtheit der Äquivalenzklassen komplexer Riemannscher Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$ von $3(g-1)$ komplexen Parametern abhängt.

Teichmüller (1942) hat diese Vermutung bewiesen und die Gedanken von Riemann folgendermaßen präzisiert: Er führt den Begriff der topologischen festgelegten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g ein. Darunter versteht man eine Äquivalenzklasse (S,α), wobei $\alpha : S_o \longrightarrow S$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus zwischen Riemannschen Flächen ist; zwei Paare (S,α), (S',α') sind äquivalent, wenn $\alpha^{-1} \cdot \alpha'$ zu einem konformen Automorphismus homotop ist (dabei ist S_o eine festgewählte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$). Teichmüller zeigte, daß die Menge T_g dieser Äquivalenzklassen in natürlicher Weise als $(3g-3)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann.

Ahlfors und Bers haben die Arbeiten von Teichmüller vollendet und die Beweise lückenlos abgeschlossen. Als mathematischer Apparat wurde die Theorie der quasi-konformen Abbildungen benutzt.

Grothendieck (1960) hat den Begriff der festgelegten Riemannschen Flächen relativiert, d.h. er hat Familien festgelegter Riemannscher Flächen über komplexen Räumen betrachtet.

Er beweist die Existenz einer universellen Familie $V \longrightarrow T$; als Mengen stimmen T und T_g überein. T trägt damit eine universelle komplexe Struktur, die mit der von Teichmüller, Ahlfors und Bers betrachteten Struktur übereinstimmt.

In dieser Arbeit werden die Grothendieckschen Beweisideen präzisiert und ausführlich dargestellt; für die Starrheit des Jacobi-Funktors wurde ein anderer, elementarer Beweis gefunden.

Zunächst bringen wir eine kurze Zusammenfassung der "klassischen Theorie" des Teichmüller-Raums und begründen die Einführung des Teichmüller-Funktors im Sinne von Grothendieck (§ 1, § 2).

In § 3, § 4 erfolgt eine Darstellung der folgenden Begriffe: "gefaserte Kategorien", "kartesische Funktoren", "starre Funktoren","Darstellbarkeit einer gefaserten Kategorie". Im fünften Paragraphen werden die Grothendieckschen Sätze über Gruppenwechsel ausführlich bewiesen.

Wir geben im § 6 den Beweis der Starrheit des n-Jacobi-Funktors; § 7 und § 8 bringen die Hauptsätze der Grothendieckschen Theorie.

Die wichtigsten Definitionen und Sätze, die wir benutzt haben, sind in einem Anhang zusammengefaßt, um die Lektüre der Arbeit zu erleichtern.

Für das Thema und die wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Stein herzlich danken.

Meinem Kollegen und Freund Dr. H.W. Schuster danke ich für seine rege Anteilnahme bei der Vollendung dieser Arbeit und für wertvolle Ideen, die er mir in vielen Gesprächen mitgeteilt hat.

Die Herren Dr. G. Kraus, M. Schottenloher und Priv. Doz. Dr. K.W. Wiegmann haben mir bei der Korrektur geholfen und stili-

stische Verbesserungen vorgeschlagen; ich möchte ihnen an dieser Stelle danken.

Mathematisch und menschlich verdanke ich meinen Professoren und Kollegen aus dem Mathematischen Institut der Akademie in Bukarest sehr viel; bei dieser Gelegenheit möchte ich auch dafür herzlich danken.

Schließlich möchte ich der Humboldt-Stiftung danken, die mir diese Arbeit durch großzügige finanzielle Unterstützung ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

§ 1	Die Idee des Teichmüller-Raums	5
§ 2	Übergang zur Grothendieckschen Theorie	12
§ 3	Gefaserte Kategorien	19
§ 4	Starre Funktoren	25
§ 5	Der Gruppenwechsel	32
§ 6	Starrheit des Funktors $\underline{J}_n$	42
§ 7	Die Darstellbarkeit des Funktors $\underline{G}_R$	48
§ 8	Die Darstellbarkeit von $\underline{J}_n$	58
Anhang		64
Literatur		76

Bezeichnungen:

Ens (bzw. Top, An) bezeichnen die Kategorie der Mengen (bzw. topologischen Räume, analytischen Räume).

Ist A eine null-dimensionale analytische Algebra, so wird mit A gleichzeitig der einpunktige komplexe Raum bezeichnet, dessen Halm A ist. Mit p_o (bzw. p_1) wird ein einpunktiger komplexer Raum bezeichnet, dessen lokaler Ring C (bzw. $C[T]/(T^2)$) ist. Auch sonst halten wir uns an die Bezeichnungen von Grothendieck [SB], [SC].

§ 1. Die Idee des Teichmüller Raums

Es sei eine kompakte Riemannsche Fläche S_o vom Geschlecht $g \geq 2$ gegeben. Jeder Homöomorphismus f von S_o auf sich induziert die Gruppenisomorphismen $H^n(f) : H^n(S_o,\underline{Z}) \to H^n(S_o,\underline{Z})$, $H_n(f) : H_n(S_o,\underline{Z}) \to H_n(S_o,\underline{Z})$ und $\pi_n(f) : \pi_n(S_o,s_o) \to \pi_n(S_o,f(s_o))$ für alle $n \in \underline{N}$; außerdem hängen $H^n(f)$, $H_n(f)$ und $\pi_n(f)$ nur von der Homotopieklasse von f ab. Insbesondere induziert jede Homotopieklasse der Homöomorphismen von S_o einen Gruppenautomorphismus von $H^2(S_o,\underline{Z})$. Sei $\sigma \in H^2(S_o,\underline{Z})$ gewählt, so daß die Abbildung $\underline{Z} \to H^2(S_o,\underline{Z}) : n \to n.\sigma$ ein Gruppenisomorphismus ist. f ist genau dann orientierungstreu, wenn $H^2(f)(\sigma) = \sigma$ gilt.

Die Menge aller Homotopieklassen der orientierungstreuen Homöomorphismen von S_o bildet eine Gruppe, die sogenannte Teichmüller-Gruppe. In dieser Arbeit wird diese Gruppe stets mit γ bezeichnet.

Sei $e_1,\ldots,e_g, f_1,\ldots,f_g$ eine Basis von $H_1(S_o,\underline{Z})$, deren Schnittmatrix gleich $\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist, wobei 0 (bzw. 1) die $g \times g$ Nullmatrix (bzw. Einheitsmatrix) ist.

Ein Homöomorphismus h von S_o bildet die Basis $e_1,\ldots,e_g, f_1,\ldots,f_g$ auf die Basis $h(e_1),\ldots,h(e_g), h(f_1),\ldots,h(f_g)$ ab, deren Schnittmatrix die gleiche ist (laut Definition !).

Sei $h(e_i) = \sum_{j=1}^{g} n_{ij}\, e_j + \sum_{j=1}^{g} n_{i,j+g}\, f_j$,

$$h(f_i) = \sum_{j=1}^{g} n_{i+g,j}\, l_j + \sum_{j=1}^{g} n_{i+g,j+g}\, f_j \,.$$

Die Gleichungen: $h(e_i) \times h(f_j) = \delta_{ij}$ $i,j=1,\ldots,g$ sind mit $N\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)N^t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ äquivalent, wobei N die Koeffizientenmatrix (n_{ij}) bedeutet.

Wegen der Definition der symplektischen Gruppe vom Rang g (die mit $SP(g,\underline{Z})$ bezeichnet ist), gehört daher N der Gruppe $SP(g,\underline{Z})$ an. Auf diese Weise erhält man offensichtlich einen Gruppenhomomorphismus

$$\gamma \to SP(g,\underline{Z}) \subset Aut(\underline{Z}^{2g}) \approx Aut(H_1(S_o,\underline{Z})) \ .$$

Für jedes $n \in \underline{N}$ gibt es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} SP(g,\underline{Z}) & \longrightarrow & Aut(H_1(S_o,\underline{Z})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z}) & \longrightarrow & Aut(H_1(S_o,\underline{Z}/n\underline{Z})) \end{array}$$

Wir machen eine für später (Seite 44) nützliche Bemerkung: wenn f orientierungstreu und α_o der Poincaré-Isomorphismus $H_1(X,\underline{Z}) \tilde{=} H^1(X,\underline{Z})$ ist, so gilt: $\alpha_o \cdot H_1(f) = H^1(f^{-1}) \cdot \alpha_o$.

Definition 1.1 (Teichmüller). Eine festgelegte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare (S,α), wobei α ein topologischer, orientierungstreuer Homöomorphismus von S_o auf die Riemannsche Fläche S ist, bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation: $(S,\alpha) \sim (S',\alpha')$ dann und nur dann, wenn es einen orientierungstreuen konformen Homöomorphismus $f : S \to S'$ in der Homotopieklasse von $\alpha'\alpha^{-1}$ gibt.

Diese Definition ist mit der folgenden von Ahlfors gegebenen Definition äquivalent:

Definition 1.1'. Eine festgelegte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g (bei Ahlfors: an abstract Riemann surface with generators) ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare $(S,(A,B))$, wobei S eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist und $A = (a_1,a_2,\ldots,a_g)$, $B = (b_1,b_2,\ldots,b_g)$ ein erzeugendes System von $\pi_1(S,s)$ bilden (dabei sei $s \in S$ und $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1$), bezüglich folgender Äquivalenzrelation: $(S,(A,B)) \sim (S',(A',B'))$ dann und nur dann, wenn es einen orientierungstreuen, konformen Homöomorphismus f von S auf S' gibt, so daß das Bild von (A,B) in $\pi_1(S',f(s))$ mit (A',B') konjugiert ist (d.h. es gibt einen Weg τ in S', derart, daß $\tau(0) = f(s)$, $\tau(1) = s'$ und $a_i' = \tau^{-1}(f\cdot a_i)\tau$, $b_i' = \tau^{-1}(f\cdot b_i)\tau$ für alle $i=1,2,\ldots,g$ gilt).

Die Menge aller Klassen bildet einen "Raum" T_g, der Teichmüller-Raum genannt wird. Auf natürliche Weise ist ν eine Operatorengruppe für T_g.

Definition 1.2. Eine Torelli-Fläche ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare (S,α), wobei S eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g ist und $\alpha : S_o \to S$ ein topologischer, orientierungstreuer Homöomorphismus ist bezüglich folgender Äquivalenzrelation: $(S,\alpha) \sim (S',\alpha')$ genau dann, wenn es einen konformen orientierungstreuen Homöomorphismus $f : S \to S'$ in der Homologieklasse von $\alpha'\alpha^{-1}$ gibt.

Mit anderen Worten kann man diese Definition so ausdrücken:

Definition 1.2'. Eine Torelli-Fläche ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare $(S,(\Gamma,\Delta))$, wobei S eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ und (Γ,Δ) eine geordnete Basis von $H^1(S,\underline{Z})$ ist bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation: $(S,(\Gamma,\Delta)) \sim (S',(\Gamma',\Delta'))$ bedeutet, daß es einen konformen, orientierungstreuen Homöomorphismus $f : S' \to S$ gibt, so daß $H^1(f)(\Gamma,\Delta) = (\Gamma',\Delta')$ ist.

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird Torelli-Raum genannt und mit $\mathfrak{T}_g$ bezeichnet.

Da zwei homotope Abbildungen homo log-äquivalent sind, gibt es eine surjektive Abbildung $\pi_g : T_g \to \mathfrak{T}_g$.

Definition 1.3. Eine n-Jacobi-Fläche $(n \geq 2)$ ist eine Äquivalenzklasse in der Menge aller Paare (S,α), in der S und α dieselbe Bedeutung haben, wie in den vorgegebenen Definitionen (1.1 und 1.2) bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation: $(S,\alpha) \sim (S',\alpha')$ genau dann, wenn es einen konformen, orientierungstreuen Homöomorphismus $f : S \to S'$ gibt, so daß $H^1(f^{-1}\alpha'\alpha^{-1}) = {}_1H^1(S,\underline{Z}/n\underline{Z})$ ist.

Die Menge aller solchen Äquivalenzklassen wird n-Jacobi-Raum genannt und mit $J_{n,g}$ bezeichnet.

Auf Grund der Surjektion $H^1(S,\underline{Z}) \to H^1(S,\underline{Z}/n\underline{Z})$ ist in kanonischer Weise eine surjektive Abbildung $\pi_{n,g} : \mathfrak{T}_g \to J_{n,g}$ definiert.

Wir werden kurz die Hauptergebnisse der klassischen Theorie, deren Beweise in [A], [B], [R], [AF 1], [AF 2] ausführlich gegeben sind, erläutern.

Definition 1.4. Ein Homöomorphismus zwischen Riemannschen Flächen $f : S \to S'$ heißt eine Teichmüllersche Abbildung, wenn entweder f ein quasi-konformer Homöomorphismus (der eine Relation $\frac{df}{dz} = k\frac{\phi(z)}{|\phi(z)|}\frac{df}{dz}$ erfüllt, wobei k eine positive Zahl < 1 ist und $\phi(z)dz^2$ eine reguläre, differenzierbare Form auf S ist) oder f ein konformer Homöomorphismus ist.

Theorem 1.5 (Teichmüller). Seien (S,α) und (S',α') zwei festgelegte Riemannsche Flächen (bzw. Torelli-Flächen); dann gibt es genau eine Teichmüllersche Abbildung $f_{\alpha\alpha'} : S \to S'$ in der Homotopieklasse (bzw. Homologieklasse) von $\alpha'\cdot\alpha^{-1}$, derart daß jede andere quasi-konforme Abbildung, die in der Homotopieklasse (bzw. Homologieklasse) von $\alpha'\cdot\alpha^{-1}$ liegt, eine strikt größere maximale Ausdehnung als $f_{\alpha\alpha'}$ hat.

Mit $K[f_{\alpha\alpha'}]$ wird die maximale Ausdehnung von $f_{\alpha\alpha'}$ bezeichnet. Die durch $d((S,\alpha),(S',\alpha')) := \log K[f_{\alpha\alpha'}]$ definierte Funktion $d : T_g \times T_g \to \mathbb{R}_+$ (bzw. $d : \mathfrak{T}_g \times \mathfrak{T}_g \to \mathbb{R}_+$) ist eine Metrik auf T_g (bzw. $\mathfrak{T}_g$). Mit dieser metrischen Struktur ist T_g (bzw. $\mathfrak{T}_g$) homöomorph mit der $(6g-6)$-dimensionalen offenen Kugel [T3].

Für diese Topologien ist die Abbildung $\pi_g : T_g \to \mathfrak{T}_g$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Jede Faser ist auf natürliche Weise mit der Gruppe

$$H := \{u \in \pi_1(S_o, s_o) : H^1(u) = 1_{H^1(S_o, \underline{Z})}\}$$

isomorph.

Sei $(X,(A,B))$ ein Repräsentant einer festgelegten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g; es gibt eine eindeutig bestimmte Basis des Vektorraums der geschlossenen holomorphen Differentialformen ersten Grades $\xi^1,\dots,\xi^g$, derart daß $\int_{a_j} \xi^i = \delta_{ij}$ für alle $i,j=1,\dots,g$ gilt.

Die Perioden-Matrix $\pi := (\pi_{ij}) := (\int_{b_j} \xi^i)$ ist eine Riemannsche Matrix (d.h. ist symmetrisch, und $\operatorname{Im}\pi$ ist positiv definiert) und hängt nur von der Äquivalenzklasse von $(X,(A,B))$ ab.

Man erhält also eine Abbildung $\pi : T_g \to Gl(g,\mathbb{C})$. Diese Abbildung läßt sich durch π_g faktorisieren, da aus $\pi_g(t) = \pi_g(t')$ folgt $\pi(t) = \pi(t')$. Sei $\tilde{\pi} : \mathfrak{T}_g \to Gl(g,\mathbb{C})$ mit $\tilde{\pi}\cdot\pi_g = \pi$.

Theorem 1.6. Es gibt auf $\mathfrak{T}_g$ (und wegen π_g auch auf T_g) genau eine mit der oben definierten Topologie verträgliche komplex-analytische Struktur, so daß $\tilde{\pi}$ (und damit auch π_g) eine holomorphe Abbildung ist; mit dieser Struktur ist $\mathfrak{T}_g$ (bzw. T_g) eine $(3g-3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 1.7. a) Die komplexe Struktur kann auch (nach Ahlfors und Bers [AB], [AF_2]) mit Hilfe der Beltrami-Differentiale eingeführt werden.

b) Nach Bers und Ehresmann [BE] ist T_g eine Steinsche Mannigfaltigkeit und nach A.Weil eine Kählersche Mannigfaltigkeit.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}_g$ (bzw. H_g) die Menge aller Punkte von $\mathfrak{T}_g$ (bzw. T_g), die Hyperelliptischen Repräsentanten besitzen, so gilt:

Theorem 1.8 (Rauch). $\mathfrak{H}_g$ (bzw. H_g) ist eine $(2g-1)$-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{T}_g$ (bzw. T_g).

Das vollständige Ergebnis in der "klassischen Theorie" des Teichmüller Raums besteht in "Main Theorem" von Bers [B].

Vermutlich hat diese schöne Formulierung zu der Idee geführt, die "Teichmüller-Kurven" zu benutzen.

Mit den im nächsten Kapitel eingeführten Begriffen sagt dieser Satz unter anderem aus, daß eine Teichmüller-Kurve über T_g existiert, die mit (V_g, ξ_g) bezeichnet wird.

§ 2. Übergang zur Grothendieckschen Theorie

Sei $g \geq 2$ eine natürliche Zahl und X_0 eine feste Riemannsche Fläche vom Geschlecht g.

Definition 2.1.

a) Eine Kurve vom Geschlecht g über einem komplexen Raum S (oder kürzer: eine g-Kurve über S) ist ein komplexer Raum X zusammen mit einer eigentlichen, einfachen Abbildung $p : X \to S$, derart daß alle Fasern $X_s := p^{-1}(s)$ Riemannsche Flächen vom Geschlecht g sind.

b) Seien $p_i : X_i \to S_i$ $(i=1,2)$ zwei g-Kurven, $\varphi : X_1 \to X_2$ und $f : S_1 \to S_2$ zwei Morphismen komplexer Räume. Man sagt, daß φ über f liegt, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi} & X_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \end{array}$$

kartesisch ist.

Insbesondere über 1_S (man sagt: über S) liegen genau alle S-Isomorphismen von g-Kurven.

Wenn $\varphi : X_1 \to X_2$ (bzw. $\psi : X_2 \to X_3$) über $f : S_1 \to S_2$ (bzw. $g : S_2 \to S_3$) liegt, dann liegt $\psi \cdot \varphi$ über $g \cdot f$. Die g-Kurven über komplexen Räumen, mit den oben definierten Morphismen, bilden eine Kategorie $\underline{C}^g$. Auf natürliche Weise ist ein "Projektionsfunktor" $\underline{C}^g \to \underline{An}$ definiert (jeder g-Kurve X über S ordnet man S zu; jedem Morphismus φ über f ordnet man f zu).

Sei $X \overset{p}{\to} S$ eine g-Kurve. Für jedes $s \in S$ sei $\underline{T}(X_s)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von orientierungstreuen Homöomorphismen $X_o \to X_s$ bezüglich Homotopie (für stetige Abbildungen).

$\underline{T}(X_o)$ ist genau die Teichmüller-Gruppe γ; außerdem ist $\underline{T}(X_s)$ ein γ-Operatorenraum. Wir werden die Menge $\underline{T}(X/S) := \bigcup_{s\in S} \underline{T}(X_s)$ auf funktorielle Weise mit einer komplexen Struktur versehen, derart daß gilt:

1^o. die kanonische Abbildung $\underline{T}(X/S) \to S : \underline{T}(X_s) \to \{s\}$ ist analytisch;

2^o. für die oben eingeführte γ-Operation ist $\underline{T}(X/S)$ ein γ-Prinzipalbündel über S.

Für jedes $T \in Ob(\underline{An}/S)$ betrachten wir die Menge aller T-Homöomorphismen $h : T \times X_o \to X_T$ $(X_T := T \underset{S}{\sqcap} X)$, die auf den Fasern (d.h. für alle t, $h_t : X_o \to X_{T,t}$) orientierungstreu sind. Zwei solche T-Homöomorphismen $h_o, h_1 : T \times X_o \to X_T$ sind äquivalent, falls eine stetige Abbildung über T, $H : [0,1] \times T \times X_o \to X_T$ existiert, derart daß $H(0,-,-) = h_o$, $H(1,-,-) = h_1$ gilt, und $H(v,t,-) : X_o \to X_{T,t}$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus für alle $v \in [0,1]$ und $t \in T$ ist. Die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser "Homotopie" wird durch $H_{X/S}(T)$ bezeichnet; wenn U die offenen Mengen des Raumes T durchläuft, bildet die Familie $\{H_{X/S}(U)\}$ zusammen mit üblichen Restriktionen ein Garbendatum $H_{X/S}$; die Menge der globalen Schnitte der assoziierten Garbe werden mit $\tilde{H}_{X/S}(T)$ bezeichnet.

Bevor wir den Hauptsatz dieses Paragraphen bringen, machen wir einige Bemerkungen:

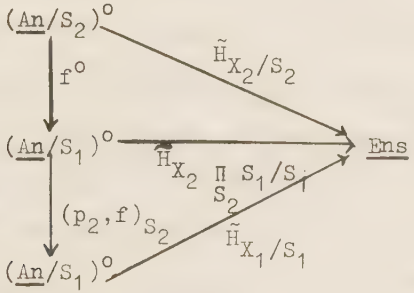
a) $T \to \tilde{H}_{X/S}(T)$ definiert einen Funktor $\tilde{H}_{X/S} : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$.

b) Wenn $\varphi : X \to Y$ ein S-Isomorphismus ist (oder schwächer: ein S-Homöomorphismus, derart daß für jedes $s \in S$, $\varphi_s : X_s \to Y_s$ orientierungstreu ist), dann bekommt man durch Komposition einen Morphismus von Garbendaten $\varphi^* : H_{Y/S} \to H_{X/S}$ und dadurch einen funktoriellen Morphismus $\tilde{\varphi} : \tilde{H}_{Y/S} \to \tilde{H}_{X/S}$.

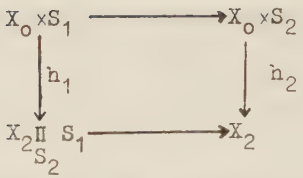
c) Wenn $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ zwei S-Isomorphismen sind, dann gilt: $\widetilde{\psi \cdot \varphi} = \tilde{\varphi} \cdot \tilde{\psi}$; außerdem: $\tilde{1}_X = 1_{\tilde{H}_{X/S}}$ ist.

d) Wenn $\varphi : X_1 \to X_2$ über $f : S_1 \to S_2$ mittels $p_i : X_i \to S_i$ $(i=1.2)$ liegt, dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

(2.1.1)



wobei f^o der Basiswechselfunktor $- \prod_{S_2} S_1$ ist und $(p_2,f)_{S_2} : X_1 \to X_2 \prod_{S_2} S_1$ die von p_2 und f kanonisch-induzierte Abbildung bezeichnet. Dafür genügt es zu bemerken, daß jedes $h_2 \in H_{X_2/S_2}(S_2)$ eindeutig ein $h_1 \in H_{X_2 \prod_{S_2} S_1}(S_1)$ derart induziert, daß in $\underline{Top}$ das folgende Diagramm



kartesisch ist. Und das folgt aus der Bemerkung, daß h_{1,s_1} und $h_{2,f(s_1)}$ für alle $s_1 \in S_1$ "gleich" sind.

Satz 2.2. Der Funktor $\tilde{H}_{X/S}$ ist darstellbar durch einen komplexen Raum, dessen zugrunde liegende Menge $\underline{T}(X/S)$ ist.

Beweis. Zuerst bemerken wir, daß $\tilde{H}_{X_o \times S/S}$ durch $S \times \gamma$ darstellbar ist (γ ist mit der diskreten Struktur versehen). Das folgt vor allem, weil jeder komplexe Raum lokal zusammenhängend ist.

Da $\tilde{H}_{X/S}$ von lokaler Natur ist (s. Anhang D.6) genügt es, eine offene Überdeckung $(S_i)_{i \in \underline{T}}$ von S so zu finden, daß $\tilde{H}_{X/S}$ beschränkt auf $(\underline{An}/S_i)^o$ (d.h. laut obigen Bemerkungen $\tilde{H}_{X_i/S_i}$, wobei $p^{-1}(S_i) =: X_i$ ist) darstellbar ist. Eine solche Überdeckung findet man folgendermaßen: Mittels Anhang C existiert für jedes $s_o \in S$ eine zusammenhängende, offene Umgebung S' von s_o und ein Homöomorphismus über S_o:
$h : S' \times X_o \to X' := p^{-1}(S')$. Ist h_{s_o} orientierungstreu, so gilt das auch für alle h_s, $s \in S'$ und dann ist $\tilde{H}_{X'/S'} \approx \tilde{H}_{S' \times X_o/S'}$ durch $S' \times \gamma$ darstellbar.

Wenn h_{s_o} nicht orientierungstreu ist, dann betrachtet man einen nichtorientierungstreuen Homöomorphismus ε von X_o und ist

$h \cdot (1_{S'} \times \varepsilon)$ auf den Fasern orientierungstreu (wieder ist $\tilde{H}_{X'/S'}$ darstellbar).

Sei $\underline{G\text{-PB}}$ die Kategorie der G-Prinzipalbündel mit Faser G über komplexen Räumen. Mit dieser Bezeichnung ist $\underline{T}$ ein Funktor $\mathcal{C}^{\mathcal{E}} \to \mathcal{V}\text{-PB}$, der $\underline{\text{Teichmüller Funktor}}$ genannt ist. Für jeden Morphismus $S' \to S$ aus $\underline{An}$ existiert ein funktorieller Isomorphismus:

$$(2.1.2) \qquad \underline{T}(-/S) \underset{S}{\sqcap} S' \approx \underline{T}(- \underset{S}{\sqcap} S'/S')$$

(beide Funktoren sind auf $(\underline{An}/S)^0$ definiert).

Sei wieder X eine g-Kurve über S. Mit $\overset{S}{\equiv}$ (bzw. $\overset{S}{\approx}$) bezeichnet man die folgende Äquivalenzrelation in der Menge $\underline{T}(X_s)$:

$h \overset{S}{\equiv} h'$ (bzw. $h \overset{S}{\approx} h'$) dann und nur dann, wenn $H^1(h^{-1} \cdot h', \underline{Z}) = {}^1_{H^1(X_o, \underline{Z})}$ (bzw. $H^1(h^{-1} \cdot h', \underline{Z}/n\underline{Z}) = {}^1_{H^1(X_o, \underline{Z}/n\underline{Z})}$) gilt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\underline{\mathfrak{T}}(X/S) := \bigcup_{s \in S} \underline{T}(X_s)/\overset{S}{\equiv}$$

$$\underline{J}_n(X/S) := \bigcup_{s \in S} \underline{T}(X_s)/\overset{S}{\approx} \quad .$$

Die im ersten Paragraphen betrachtete Abbildung $\gamma \to SP(g, \underline{Z})$ hat als Kern genau $\{g \in \gamma : g \equiv 1_{X_o}\}$; deshalb induziert diese Abbildung eine injektive Abbildung $\underline{\mathfrak{T}}(X_o) := \underline{T}(X_o)/\equiv \to SP(g, \underline{Z})$. Laut einem Satz von Dehn ([M]) ist diese Abbildung surjektiv, d.h. $\underline{\mathfrak{T}}(X_o)$ und $SP(g, \underline{Z})$ (und daraus auch $\underline{J}_n(X_o) := \underline{T}(X_o)/\sim$ und $SP(g, \underline{Z}/n\underline{Z})$) sind isomorph.

Außerdem ist $\underline{\Upsilon}(X_s)$ (bzw. $\underline{J}_n(X_s)$) ein $SP(g,\underline{Z})$ (bzw. $SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$) Operatorenraum für alle $s \in S$. Insbesondere ist der oben erklärte Isomorphismus $\underline{\Upsilon}(X_o) \simeq SP(g,\underline{Z})$ (bzw. $\underline{J}_n(X_o) \simeq SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$) verträglich mit dieser Operation. Die Menge $\underline{\Upsilon}(X/S)$ (bzw. $\underline{J}_n(X/S)$) läßt sich auf funktorielle Art mit einer komplexen Struktur versehen, derart daß die Abbildung $\underline{\Upsilon}(X/S) \to S : \underline{\Upsilon}(X_s) \to \{s\}$ (bzw. $\underline{J}_n(X/S) \to S : \underline{J}_n(X_s) \to \{s\}$) analytisch ist und die Aktion von $SP(g,\underline{Z})$ (bzw. $SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$) auf $\underline{\Upsilon}(X/S)$ (bzw. $\underline{J}_n(X/S)$) eine Struktur von $SP(g,\underline{Z})$-Prinzipalbündel (bzw. $SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$) über S definiert.

Dafür betrachtet man die Prägarbe $\mathfrak{H}_{X/S}$ (bzw. $H_{X/S,n}$), die aus $H_{X/S}$ mittels $\equiv$ (bzw. $\sim$) definiert ist und die assoziierte Garbe $\tilde{\mathfrak{H}}_{X/S}$ (bzw. $\widetilde{H_{X/S,n}}$). Der Beweis von 2.2 läßt sich direkt übertragen und wir erhalten das folgende Ergebnis:

Satz 2.2'. Der Funktor $\tilde{\mathfrak{H}}_{X/S}$ (bzw. $\widetilde{H_{X/S,n}}$) ist darstellbar; die zugrunde liegende Menge des darstellenden Objektes ist mit $\underline{\Upsilon}(X/S)$ (bzw. $\underline{J}_n(X/S)$) identifizierbar.

Die für $\tilde{H}$ geltenden Bemerkungen a), b), c), d) und das Diagramm (2.1.1) lassen sich für $\tilde{\mathfrak{H}}$ (bzw. $\widetilde{H_n}$) übertragen und auf diese Weise bekommt man einen Funktor $\underline{\tau} : \underline{C}^g \to \underline{SP(g,Z)\text{-PB}}$ bzw. $\underline{J}_n : \underline{C}^g \to \underline{SP(g,Z)\text{-PB}}$), der Torelli-Funktor (bzw. n-Jacobi-Funktor) genannt wird. Für $\underline{\tau}$ (bzw. $\underline{J}_n$) gilt eine mit (2.1.2) verwandte Formel.

Die im § 1 definierten Homomorphismen:

$$\gamma \triangleq SP(g,\underline{Z}) \xrightarrow{\lambda_n} SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$$

induzieren die Funktoren:

$$\underline{\gamma\text{-PB}} \xrightarrow{\Lambda} \underline{SP(g,\underline{Z})\text{-PB}} \xrightarrow{\Lambda_n} \underline{SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})\text{-PB}}$$

wie folgt: Sei $P \to S$ ein γ-Prinzipalbündel; $\Lambda(P) := P/\ker\lambda$ ist ein $\gamma/\ker\lambda \approx SP(g,\underline{Z})$-Prinzipalbündel, das auf kanonische Weise dem Prinzipalbündel P mittels λ assoziiert ist. Analog definiert jeder Morphismus u von γ-Prinzipalbündeln durch Faktorisierung modulo $\ker\lambda$ den Morphismus $\Lambda(u)$. (Für eine "gröbere" Definition von Λ - siehe 5.1; wir haben dort diese Überlegungen nicht wiederholt und ergänzt - für den allgemeinen Fall eines beliebigen Gruppenhomomorphismus - da dieses effektiv ein Beweis des Satzes 5.2 erscheint).

Aus der Definition von Funktoren $\underline{T}$, $\underline{\Sigma}$, $\underline{J}_n$, Λ und Λ_n folgt:

Lemma 2.3. Die Funktoren $\underline{\Sigma}$ und $\Lambda \cdot \underline{T}$ (bzw. $\underline{J}_n$ und $\Lambda_n \cdot \Lambda \cdot \underline{T}$) stimmen bis auf einen funktoriellen Isomorphismus überein.

Im nächsten Paragraphen wird diese Situation verallgemeinert und vertieft.

§ 3. Gefaserte Kategorien

Um logische Widersprüche zu vermeiden, setzen wir stets voraus, daß alle benützten Kategorien sowie die Kategorie aller Kategorien kat einem gegebenen Universum angehören. Durch $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ werden wir die verschiedenen Kategorien bezeichnen.

Man sagt, daß $\underline{A}$ eine Kategorie über $\underline{C}$ (oder eine $\underline{C}$-Kategorie) ist, wenn ein Funktor $a : \underline{A} \to \underline{C}$ gegeben ist. Wenn $\underline{A}$, $\underline{B}$ zwei durch die Funktoren a und b gegebenen Kategorien sind, dann wird jeder Funktor $F : \underline{A} \to \underline{B}$ mit der Eigenschaft $b \cdot F = a$ ein $\underline{C}$-Funktor genannt. Auf naheliegende Weise kann man die Verknüpfung von $\underline{C}$-Funktoren, die Morphismen zwischen $\underline{C}$-Funktoren sowie das Produkt von $\underline{C}$-Kategorien definieren.

Sei $\underline{A}$ eine $\underline{C}$-Kategorie und S ein Objekt aus $\underline{C}$.

Bezeichnung 3.1. Mit $\underline{A}_S$ wird die Unterkategorie von $\underline{A}$ bezeichnet, die aus allen Objekten A aus $\underline{A}$ mit der Eigenschaft $a(A) = S$ und allen Morphismen φ mit der Eigenschaft $a(\varphi) = 1_S$ besteht.

Mit anderen Worten: $\underline{A}_S$ ist isomorph zu dem Faser-Produkt $\underline{A} \prod_{\underline{C}} \{S\}$, wobei $\{S\}$ die Unterkategorie von $\underline{C}$ ist, die S als einziges Objekt und 1_S als einzigen Morphismus besitzt.

Jeder $\underline{C}$-Funktor $F : \underline{A} \to \underline{B}$ und jedes Objekt S von $\underline{C}$ induziert kanonisch einen Funktor $F_S : \underline{A}_S \to \underline{B}_S$.

Ein $\underline{C}$-Funktor $F : \underline{A} \to \underline{B}$ heißt Äquivalenz von $\underline{C}$-Kategorien, wenn F eine Äquivalenz von Kategorien und F_S eine Äquivalenz von Kategorien für jedes $S \in Ob(\underline{C})$ ist.

Sei $\underline{A}$ eine durch den Funktor a gegebene $\underline{C}$-Kategorie, sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus in $\underline{A}$, und sei $S := a(X)$, $T := a(Y)$.

Definition 3.2. Mit den obengenannten Bezeichnungen sagt man, daß φ ein kartesischer Morphismus ist, wenn es für jedes $X \in Ob(\underline{A}_S)$ und jeden Morphismus $\Psi : X' \to Y$ mit der Eigenschaft $a(\Psi) = a(\varphi)$, genau einen Morphismus $\bar{\Psi} : X' \to X$ gibt mit $\Psi = \varphi \cdot \bar{\Psi}$.

Mit anderen Worten stellt das Paar (X,φ) den Funktor $\underline{A}_S \to \underline{Ens} : X' \to \mathrm{Hom}_{a(\varphi)}(X',Y) := \{\Psi \in \mathrm{Hom}(X,Y) : a(\Psi) = a(\varphi)\}$ dar.

Wenn $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ zwei $\underline{C}$-Kategorien sind, dann ist $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ ein kartesischer Morphismus von $\underline{A}_1 \prod_{\underline{C}} \underline{A}_2$ in $\underline{B}$ genau dann, wenn φ_1 und φ_2 kartesische Morphismen sind.

Seien $f : S \to T$ ein Morphismus in $\underline{C}$ und $Y \in Ob(\underline{A}_T)$. Wenn es ein Paar (X,φ) mit $a(X) = S$, $a(\varphi) = f$ und φ kartesisch gibt, dann ist dieses Paar bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt. Man sagt, daß X das Urbild von Y vermöge f ist und man schreibt $X = f^*(Y)$ oder $X = Y \prod_T S$ (vorläufig nur formale Bezeichnung!).

Wenn für jedes $Y \in Ob(\underline{A}_T)$ das Urbild $f^*(Y)$ existiert, dann erhält man einen Funktor $f^* : \underline{A}_T \to \underline{A}_S$.

Definition 3.3. Ein $\underline{C}$-Funktor $F : \underline{A} \to \underline{B}$ heißt kartesisch, wenn F die kartesischen Morphismen von $\underline{A}$ in kartesischen Morphismen von $\underline{B}$ abbildet.

Zieht man in Betracht, daß $\underline{C}$ durch $1_{\underline{C}}$ eine $\underline{C}$-Kategorie ist, so ist klar, was ein $\underline{C}$-kartesischer Schnitt von $\underline{A}$ ist.

Bemerkungen 3.4.

1) Jede Äquivalenz von $\underline{C}$-Kategorien ist ein kartesischer Funktor.

2) Jeder mit einem kartesischen Funktor isomorphe Funktor ist kartesisch.

3) Die Verknüpfung zweier kartesischer Funktoren ist wieder ein kartesischer Funktor.

4) $F = (F_1, F_2) : \underline{B} \to \underline{A}_1 \underset{\underline{C}}{\Pi} \underline{A}_2$ ist kartesisch, dann und nur dann, wenn die Funktoren $F_i : \underline{B} \to \underline{A}_i$ kartesisch sind $(i=1,2)$.

Definition 3.5. Eine $\underline{C}$-Kategorie $\underline{A}$ wird eine $\underline{C}$-gefaserte Kategorie genannt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Fas I. Für jeden Morphismus $f : S \to T$ aus $\underline{C}$ existiert $f^* : \underline{A}_T \to \underline{A}_S$.

Fas II. Die Verknüpfung zweier kartesischer Morphismen ist ein kartesischer Morphismus.

Die zweite Bedingung ist mit folgender Bedingung äquivalent:

Fas II'. Für jeden kartesischen Morphismus $\varphi : X \to Y$ von $\underline{A}$ über $f : S \to T$ (d.h. $a(\varphi)=f$), für jeden Morphismus $g : U \to S$ und für jedes $Z \in Ob(\underline{A}_U)$ ist die Abbildung: $Hom_g(Z,X) \to Hom_{f.g}(Z,Y) : \Psi \to \varphi \cdot \Psi$ bijektiv.

Ist insbesondere $\underline{A}$ eine $\underline{C}$-gefaserte Kategorie, so ist φ ein Isomorphismus genau dann, wenn φ kartesisch und $a(\varphi)$ ein Isomorphismus ist.

Man bemerkt sofort, daß jede mit einer gefaserten Kategorie äquivalente Kategorie auch eine gefaserte Kategorie ist. Ist ferner $\underline{A}$ eine $\underline{C}$-gefaserte Kategorie und $\underline{C}' \to \underline{C}$ ein Funktor, so ist $\underline{A}' := \underline{C}' \underset{\underline{C}}{\sqcap} \underline{A}$ eine $\underline{C}'$-gefaserte Kategorie.

Sei F ein kartesischer Funktor zwischen den $\underline{C}$-gefaserten Kategorien $\underline{A}$ und $\underline{B}$; dann ist F treu (bzw. volltreu, eine $\underline{C}$-Äquivalenz) genau dann, wenn F_S treu (bzw. volltreu, eine Äquivalenz) für alle $S \in Ob(\underline{C})$ ist.

Definition 3.6. Eine $\underline{C}$-gefaserte Kategorie $\underline{A}$ ist eine darstellbare Kategorie, wenn es ein Objekt T von $\underline{C}$ und ein Objekt V von $\underline{A}_T$ gibt, so daß es für jedes Objekt S von $\underline{C}$ und X von $\underline{A}_S$ genau einen Morphismus $g : S \to T$ gibt, derart daß X und $g^*(V)$ isomorph sind.

Beispiele 3.7.

a) Die Kategorie der Vektorräume über der Kategorie der Körper ist eine gefaserte Kategorie, die als eine "Unterkategorie" der gefaserten Kategorie von Moduln über der Kategorie der Ringe betrachtet werden kann.

b) Die Top-Kategorie der Garben ist eine gefaserte Kategorie, die unter anderem zwei Unterkategorien enthält: die Kategorie der algebraischen kohärenten Garben über der Kategorie der Schemata und die Kategorie der analytischen kohärenten Garben über der Kategorie der komplexen Räume.

c) Sei Δ^1 die Kategorie, die nur zwei Objekte, die mit 0 und 1 bezeichnet werden, und drei Morphismen (die beide Identitäten und einen weiteren Morphismus $u : 0 \to 1$) enthält. Für jede Kategorie $\underline{C}$ wird durch Morph ($\underline{C}$) die Kategorie der Funktoren $\mathrm{Hom}_{\underline{kat}}(\Delta^1, \underline{C})$ bezeichnet.

Morph ($\underline{C}$) ist eine gefaserte Kategorie vermöge des "Quelle"-Funktors $q : \mathrm{Morph}(\underline{C}) \to \underline{C}$ ($q(F) := F(0)$, $q(\varphi) := \varphi(0)$ für jeden Funktor $F \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Morph}(\underline{C}))$ und jeden Morphismus φ von Morph($\underline{C}$)).

Ein Morphismus $\varphi : F \to G$ aus Morph($\underline{C}$) ist kartesisch genau dann, wenn $G(1) = F(1)$ ist.

Lemma 3.8. Morph($\underline{C}$) ist eine $\underline{C}$-gefaserte Kategorie vermöge q.

In der Tat, wenn $f : S \to T$ ein Morphismus von $\underline{C}$ ist, und $G \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Morph}(\underline{C}))$ mit $q(G) = G(0) = T$, dann ist $f^*(G)$ wie folgt definiert: $f^*(G)(0) := S$, $f^*(G)(1) = T$, $f^*(G)(u) = G(u)f$; das Axiom Fas II ist trivialerweise erfüllt nach der obigen Bemerkung.

d) Die schon im zweiten Paragraphen eingeführten Kategorien der g-Kurven $\underline{C}^g$ über $\underline{An}$ oder der γ-Prinzipalbündel über $\underline{An}$

sind auch gefaserte Kategorien. Man kann an Stelle von
eine beliebige diskrete oder Liesche Gruppe G betrachten.

Die Funktoren $\underline{T} : \underline{C}^g \to \underline{\gamma\text{-PB}}$, $\underline{\tau} : C^g \to \underline{SP(g,Z)\text{-PB}}$,
$\underline{J_n} : \underline{C}^g \to \underline{SP(g,Z/nZ)\text{-PB}}$ sind kartesisch (laut § 2).

§ 4. Starre Funktoren

Sei G eine diskrete oder Liesche Gruppe und $\underline{G\text{-PB}}$ die $\underline{An}$-gefaserte Kategorie der Prinzipalbündel mit der Faser G. Sei $\underline{P}$ ein $\underline{An}$-kartesischer Funktor $\underline{P} : \underline{C}^g \to \underline{G\text{-PB}}$. Setzt man statt $\underline{P}_S$, $\underline{P}(\ /S) : \underline{C}^g_S \to \underline{G\text{-PB}}_S$ für die Beschränkung von $\underline{P}$ auf die Unterkategorien über S, so bedeutet diese Voraussetzung die Existenz eines funktoriellen Isomorphismus:

$\underline{P}(X \underset{S}{\times} S'/S') \approx \underline{P}(X/S) \underset{S}{\times} S'$ (für jeden Morphismus $S' \to S$) in X.

Definition 4.1. $\underline{P}$ heißt ein **starrer Funktor** (oder **G-starrer Funktor**, wenn man mehrere Gruppen betrachtet), wenn für jeden Automorphismus $u \in \mathrm{Aut}_S X$ gilt: aus $\underline{P}(u/S) = 1_{\underline{P}(X/S)}$ folgt $u = 1_X$.

Definition 4.2. Sei $X \in \underline{C}^g_S$ eine Kurve vom Geschlecht g über S. Eine **$\underline{P}$-Struktur auf X** ist ein holomorpher Schnitt $\eta : S \to \underline{P}(X/S)$. Unter **einer $\underline{P}$-Kurve über S** versteht man eine S-Kurve X vom Geschlecht g zusammen mit einer $\underline{P}$-Struktur $\eta : S \to \underline{P}(X/S)$.

Ist G eine diskrete Gruppe, so ist η bereits dann holomorph, wenn η stetig ist.

Die $\underline{P}$-Kurven bilden eine $\underline{An}$-gefaserte Kategorie: Ein Morphismus zwischen zwei $\underline{P}$-Kurven (X,η) und (X',η') über $S \xrightarrow{f} S'$ ist ein Morphismus von $\underline{C}^g$-Kurven $X \xrightarrow{\varphi} X'$ über f mit $\underline{P}(\varphi)\cdot\eta = \eta'\cdot f$.

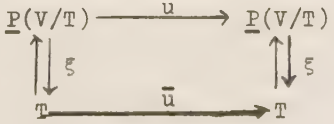
Jeder Morphismus φ von $\underline{P}$-Kurven ist kartesisch.

Wenn $\underline{P}$-starr ist, dann besitzt jede $\underline{P}$-Kurve nur den trivialen Automorphismus, weil ein S-Automorphismus eines Prinzipalbündels, der einen Schnitt invariant läßt, genau die Identität ist.

Uns interessieren noch die folgenden Probleme:
a) Besondere Eigenschaften der Kategorie der $\underline{P}$-Kurven, falls diese Kategorie darstellbar ist;
b) der Gruppenwechsel (dieser Begriff wird später erklärt; in einem konkreten Fall wurde er schon in § 2 eingeführt);
c) ein Zusammenhang mit den in den ersten zwei Paragraphen eingeführten Begriffen und erwähnten Sätzen.

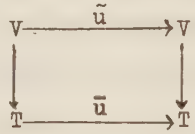
Es ist leicht zu sehen, daß die Gruppe G auf der Klasse der $\underline{P}$-Kurven operiert: in der Tat, wenn $u \in G$ und (X,η) eine $\underline{P}$-Kurve über S ist, dann ist $\eta \cdot u : S \to \underline{P}(X/S)$ (durch $(\eta \cdot u)(s) := \eta(s) \cdot u$ definiert) auch ein Schnitt; also ist auch $(X,\eta \cdot u)$ eine $\underline{P}$-Kurve über S, die mit $(X,\eta)^u$ bezeichnet wird. Die Operation von G ist funktoriell.

Sei $\underline{P}$ - wie oben - starr, und sei $(T,(V,\xi))$ ein Paar, das die $\underline{An}$-Kategorie der $\underline{P}$-Kurven darstellt. Die $\underline{P}$-Struktur $\xi : T \to \underline{P}(V/T)$ wird die universelle Struktur genannt. Für jedes $u \in G$ ist die $\underline{P}$-Kurve $(V,\xi)^u$ über T durch einen Automorphismus $\bar{u} : T \to T$ aus (V,ξ) zu erreichen, d.h. das Diagramm:



ist kommutativ. Dadurch erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $- : G \to \mathrm{Aut}\, T$.

Auf kanonische Weise erhält man auch einen Gruppenhomomorphismus $\sim : G \to \mathrm{Aut}(V)$, so daß für jedes $u \in G$ das Diagramm:



kartesisch ist.

Wenn (X,η) eine P-Kurve über S ist und $f : S \to T$ so gewählt wird, daß $f^*((V,\xi)) \approx (X,\eta)$ ist, dann gilt:

$$(\bar{u}\cdot f)^* ((V,\xi)) \approx (X,\eta)^u.$$

In diesem Paragraphen wird G von nun an stets als diskrete Gruppe vorausgesetzt.

Satz 4.3. Seien (X,η), (X',η') zwei P-Kurven über S und $f,f' : S \to T$ zwei Morphismen aus An, so daß gilt: $f^*((V,\xi)) \approx (X,\eta)$ und $f'^*((V,\xi)) \approx (X',\eta')$.

Wenn S zusammenhängend ist, ist die Menge der Isomorphismen $X \xrightarrow{\approx} X'$ in $\underline{C}^G$ mit der Menge aller $u \in G$ mit der Eigenschaft $f' = \bar{u}\cdot f$ isomorph.

Beweis: Da die P-Kurven nur triviale Automorphismen besitzen, ist die Menge der Isomorphismen $X \xrightarrow{\approx} X'$ in $\underline{C}^G$ mit der Menge der Isomorphismen $(X,\eta) \xrightarrow{\approx} (X',\eta')$ in der Kategorie

der $\underline{P}$-Kurven "gleich". Da S zusammenhängend und G diskret ist, gibt es für jeden S-Isomorphismus $\varphi : (X,\pi) \xrightarrow{\approx} (X',\pi')$ ein eindeutig bestimmtes Element $u \in G$, derart daß für alle $s \in S$ gilt:

$$\xi(s)\cdot u = \xi(s) .$$

Aber u erfüllt diese Gleichung genau dann, wenn $f' = \bar{u}\cdot f$. Umgekehrt folgt aus der universalen Eigenschaft des Faserproduktes, daß für jedes $u \in G$ mit der Eigenschaft $f' = \bar{u}\cdot f$ ein eindeutig bestimmter S-Isomorphismus $\varphi : X \to X'$ existiert. Diese beiden Abbildungen sind zueinander invers.

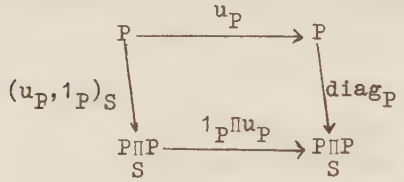
Sei $\underline{P}$ ein starrer Funktor und sei $(T,(V,\xi))$ das darstellende Objekt der $\underline{An}$-gefaserten Kategorie der $\underline{P}$-Kurven.

$\underline{T\text{-}G\text{-}Paar}$ bezeichnet die $\underline{An}$-gefaserte Kategorie, deren Objekte die Paare (P,f) sind, wobei P ein Prinzipalbündel mit Faser G über einem komplexen Raum S und f ein G-Morphismus $P \to T$ ist, und deren Morphismen die Paare (h,l) sind, wobei $h : P \to P'$ ein G-Morphismus aus $\underline{G\text{-}PB}_T$ über $l : S \to S'$ ist.

Wir ordnen jedem $X \in Ob(\underline{C}^g_S)$ ein Paar (P,f) zu, wie folgt: $P := \underline{P}(X/S)$; f wird auf die folgende Weise konstruiert: $X_P := X \underset{S}{\sqcap} P$ ist ein Prinzipalbündel über X mit Faser G. Da $\underline{P}(X_P/P) \approx \underline{P}(X/S) \underset{S}{\sqcap} P = P \underset{S}{\sqcap} P$ ist, gibt es eine $\underline{P}$-Kurve über P - und zwar $(X_P, diag_P)$, wobei $diag_P : P \to P \underset{S}{\sqcap} P$ die diagonale Abbildung ist.

Dann sei f die eindeutige holomorphe Abbildung $f : P \to T$, mit $f^*((V,\xi)) \approx (X_P, diag_P)$.

Für jedes $u \in G$ sei u_P die Abbildung $u_P : P \to P$, $u_P(p) := p \cdot u$ für alle $p \in P$. Da das Diagramm



kartesisch ist, folgt: $(X_P, diag_P)^u \approx (X_P, (u_P, 1_P)_S)$. Diese Gleichung zusammen mit der Kommutativität des obigen Diagramms zeigt: $\bar{u} \cdot f = f \cdot u_P$, d.h. f ist ein G-Morphismus.

Es folgt unmittelbar, daß dadurch ein kartesischer Funktor zwischen An-gefaserten Kategorien $\underline{C}^g$ und T-G-Paar definiert wurde.

Satz 4.4. Der oben erklärte Funktor $\underline{C}^g \to$ T-G-Paar ist eine Äquivalenz von An-gefaserten Kategorien.

Beweis. Wir werden nur den quasi-inversen Funktor T-G-Paar $\to \underline{C}^g$ definieren und diesen nur auf Objekten, da die übrigen Verifikationen routinemäßig erfolgen.

Sei $(P,f) \in Ob(\text{T-G-Paar})$; dann ist $X := P \underset{T}{\sqcap} V$ eine g-Kurve über P. Die Sequenz $P \underset{S}{\sqcap} P \overset{p1}{\underset{p2}{\rightrightarrows}} P \to S$ ist exakt, d.h. S ist mit coker(p1,p2) isomorph (oder anders geschrieben $P/G \approx S$). Da G auf P frei und eigentlich operiert, operiert G auch auf X eigentlich und frei, und deshalb existiert X/G. Außerdem ist die kanonisch-induzierte Abbildung $X/G \to S$ einfach

und eigentlich. Die Fasern dieser Abbildung sind kompakte Riemannsche Flächen; ihr Geschlecht muß g sein, da X eine g-Kurve über P ist (und G frei operiert).

Bemerkung 4.5. Eine Variante des oben bewiesenen Satzes ist folgendes: Sei $\underline{P}$ ein starrer Funktor, wie im obigen Satz, und sei $R \in \mathrm{Ob}(\underline{An})$, derart daß es eine Äquivalenz wie im Satz 4.4 (mit R an Stelle von T) gibt. Dann ist die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven darstellbar, und R ist mit $T_{\underline{P}}$ isomorph.

Satz 4.6. Die Voraussetzungen des Satzes 4.4 seien erfüllt. Sei $\underline{A}$ eine $\underline{An}$-gefaserte Kategorie, so daß die Prinzipalbündel über komplexen Räumen mit der Faser G Morphismen von "striktem Descente" sind (siehe Anhang E). Dann ist die Kategorie der kartesischen Funktoren $\underline{C}^g \to \underline{A}$ mit der Kategorie der G-Objekte von $\underline{A}_T$ äquivalent.

Beweis. Sei $F : \underline{C}^g \to \underline{A}$ kartesisch. Der kanonische Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(V)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(F(V))$. Dadurch ist $F(V)$ aus $\underline{A}_T$ ein G-Objekt. Ist $\varphi : F \to G$ ein funktorieller Morphismus zwischen starren Funktoren, so induziert φ einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Aut}(F(V)) \to \mathrm{Aut}(G(V))$.

Den quasi-inversen Funktor baut man auf folgende Weise auf: Jedem G-Objekt $Y \in \underline{A}_T$ wird ein kartesischer Funktor $F_Y : \underline{C}^g \to \underline{A}$ assoziiert, wie folgt: einem Objekt $X \in \underline{C}^g_S$, das nach 4.4 mit (P,f) assoziiert ist, ordnet man zu

$$F_Y(X) := (P \underset{T}{\sqcap} Y)/G := \mathrm{coker}(P \underset{S}{\sqcap} P \underset{T}{\sqcap} Y \rightrightarrows P \underset{T}{\sqcap} Y).$$

Für Morphismen wird F_Y folgendermaßen definiert: Sei $X \xrightarrow{\psi} X'$ ein Morphismus über $S \longrightarrow S'$. Dann wird den Objekten X,X' und dem Morphismus ψ nach Satz 4.4 assoziiert: (P,f), (P',f') und ein G-Morphismus $\gamma : P \to P'$ mit $f = f' \cdot \gamma$; wir setzen $F_Y(\psi) := \gamma \underset{T}{\square} 1_{Y/G}$. Es ist klar, daß jedem Morphismus $Y \to Y'$ ein funktorieller Morphismus $F_Y \to F_{Y'}$ entspricht.

Korollar 4.7. Zusätzlich zur Voraussetzung des Satzes 4.6 sei H eine Liesche Gruppe. Dann gibt es eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der An-kartesischen Funktoren $\underline{C}^g \to \underline{H\text{-PB}}$ und der Unterkategorie von G-Objekten aus $\underline{H\text{-PB}}_T$ (d.h. ein Objekt $Y \in \mathrm{Ob}(\underline{H\text{-PB}}_T)$, für welches ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(Y)$ existiert, der gleichzeitig mit dem Homomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(T)$ und der Aktion von H auf Y verträglich ist).

Die G-Objekte aus $\underline{H\text{-PB}}_T$, die trivial sind, wenn man auf die G-Struktur verzichtet, sind als G-Prinzipalbündel vermöge eines Homomorphismus $G \to H$ definiert.

Wenn wir das Klassifizierungs-Theorem [FB] in Betracht ziehen, folgt:

Korollar 4.8. Sei H eine diskrete Gruppe. Ist T (das Objekt, das $\underline{P}$ darstellt) zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so sind die kartesischen Funktoren $\underline{C}^g \to \underline{H\text{-PB}}$ in einer bijektiven Korrespondenz mit der Menge der Gruppenhomomorphismen $G \to H$.

§ 5. Der Gruppenwechsel

Seien G und H zwei diskrete Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $\underline{P} : \underline{C}^G \to \underline{G\text{-PB}}$ ein kartesischer Funktor. Falls die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven darstellbar ist, wird ihr darstellendes Paar mit $(T_{\underline{P}}, (V_{\underline{P}}, \mathfrak{s}_{\underline{P}}))$ bezeichnet.

Lemma 5.1. Jedem G-Prinzipalbündel kann man vermöge φ ein H-Prinzipalbündel zuordnen; diese Zuordnung ist funktoriell.

Beweis: Die Karten $\{U_i \times G : U_i \text{ offen in } S, \bigcup_{i \in I} U_i = S\}$ werden durch $\{U_i \times H : i \in I\}$ und die Übergangsabbildungen $\{\varphi_{ij} = (1_{U_i \cap U_j}, g_{ij}) : i,j \in I\}$ durch $\{\psi_{ij} = (1_{U_i \cap U_j}, \varphi(g_{ij})) : i,j \in I\}$ ersetzt.

Eine analoge Aussage gilt für Morphismen; dadurch ist ein An kartesischer Funktor $\Phi : \underline{G\text{-PB}} \to \underline{H\text{-PB}}$ definiert.

Sei $\underline{Q} := \Phi \cdot \underline{P} : \underline{C}^G \to \underline{H\text{-PB}}$; Φ induziert ein kartesischer Funktor von der Kategorie der $\underline{P}$-Kurven in die Kategorie der $\underline{Q}$-Kurven.

Satz 5.2. Mit den obigen Bezeichnungen gilt:
1) Ist $\underline{Q}$ H-starr, dann ist $\underline{P}$ ein G-starrer Funktor.
2) Ist $\underline{P}$ G-starr und ist die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven darstellbar, so ist $\underline{Q}$ starr, genau dann, wenn $\ker \varphi$ frei auf $T_{\underline{P}}$ operiert (d.h. kein $u \neq 1$ aus $\ker \varphi$ hat einen Fixpunkt). Falls diese Voraussetzungen erfüllt sind und die Gruppe $\ker \varphi$ auf $T_{\underline{P}}$ eigentlich operiert, dann ist die Kategorie der $\underline{Q}$-Kurven dar-

stellbar; ihr darstellendes Paar wird durch $(T_{\underline{Q}},(V_{\underline{Q}},\xi_{\underline{Q}}))$ bezeichnet.

3) Ist $\underline{Q}$ starr und die Kategorie der $\underline{Q}$-Kurven darstellbar, dann ist die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven auch darstellbar.

4) Seien die beiden Kategorien darstellbar, und $\ker \omega$ operiere eigentlich auf $T_{\underline{P}}$, dann gilt: G operiert eigentlich auf $T_{\underline{P}}$ genau dann, wenn H eigentlich auf $T_{\underline{Q}}$ operiert.

Beweis:

1) Sei $\alpha : X \to X$ ein S-Automorphismus. Wenn $\underline{P}(\alpha/S)$ die Identität ist, ist $\underline{Q}(\alpha/S)$ auch die Identität. Aber $\underline{Q}$ ist starr.

2) Sei α ein S-Automorphismus von X mit $\underline{Q}(\alpha/S) = 1_{\underline{Q}(X/S)}$.

Es genügt zu zeigen, daß α "lokal" die Identität ist. Da ein Prinzipalbündel immer lokale Schnitte besitzt, kann man annehmen, daß X eine $\underline{P}$-Struktur η besitzt. Da man o.E.d.A. S zusammenhängend wählen kann, entspricht dem α laut Satz 4.3 ein u aus G, derart daß $f = \bar{u}\cdot f$ ist, wobei $f:S \to T_{\underline{P}}$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit der Eigenschaft $f^*((V_{\underline{P}},\xi_{\underline{P}})) = (X,\eta)$ ist. Dann ist $\underline{Q}(\alpha/S)$ genau die Abbildung $(s,h) \to (s,h\cdot\varphi(u))$. Nach Voraussetzung ist $\omega(u) = 1$, d.h. $u \in \ker \varphi$. Da $\ker \varphi$ frei auf $T_{\underline{P}}$ operiert, folgt aus $f = \bar{u}\cdot f$, daß u das Einheitselement von G ist, d.h. daß α die Identität ist.

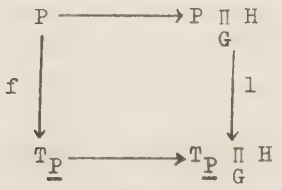
Sei umgekehrt p_o das Endobjekt in $\underline{An}$ und $u \in \ker \varphi - \{1\}$ ein Element, das einen Fixpunkt besitzt; es gibt also ein $t_o \in T_{\underline{P}}$ mit $\bar{u}(t_o) = t_o$. Sei $i_{t_o} : p_o \to T_{\underline{P}}$ (Bild $i_{t_o} = \{t_o\}$) und

$(X',\pi') := i_{t_o}^*(V_{\underline{P}},\xi_{\underline{P}})$. Laut Satz 4.3 gibt es eine von der Identität verschiedene S-Abbildung $\alpha : X' \to X'$ mit $\underline{Q}(\alpha/S) = 1_{\underline{Q}(X'/S)}$. Also ist $\underline{Q}$ kein H-starrer Funktor.

Nehmen wir nun an, $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ seien starre Funktoren und $\ker\varphi$ operiere frei und eigentlich auf $T_{\underline{P}}$. Dann existiert der Quotient $T_{\underline{P}}/\ker\varphi$. Mit $T_{\underline{P}} \prod_G H$ bezeichnen wir die $\mathrm{card}(H/\mathrm{im}\,\varphi)$-fache direkte Summe des komplexen Raumes $T_{\underline{P}}/\ker\varphi$. Sei $\Psi : H \to H/\mathrm{im}\,\varphi$ die Projektion; dann wird jedes Element von $T_{\underline{P}} \prod_G H$ durch ein Paar $(x,\Psi(h))$ dargestellt, wobei $x \in T_{\underline{P}}/\ker\varphi$ und $h \in H$ ist. Es wird für die nächsten Betrachtungen nützlich sein zu erklären, auf welche Weise $T_{\underline{P}} \prod_G H$ ein H-Objekt ist. Wenn $h \notin \mathrm{im}\,\varphi$, dann ist $\bar{h} : T_{\underline{P}} \prod_G H \to T_{\underline{P}} \prod_G H$: $\bar{h}(x,\Psi(h')) = (x,\Psi(hh'))$ ein Automorphismus. Sei $h \in \mathrm{im}\,\varphi$ und $\varphi(g) = h$.

Der Automorphismus $\bar{g} : T_{\underline{P}} \to T_{\underline{P}}$ induziert einen Automorphismus $\alpha : T_{\underline{P}}/\ker\varphi \to T_{\underline{P}}/\ker\varphi$, der nur von h abhängt. Dann ist h so definiert: $h(x,\Psi(h')) = (\alpha(x),\Psi(h'))$.

Sei $(P,f) \in \mathrm{Ob}(T_{\underline{P}}\text{-}G\text{-}\mathrm{Paar})$. Man definiert $\lambda := P \prod_G H$ wie im Lemma 5.1, und dem Morphismus f wird auf kanonische Weise ein H-Morphismus $l : Q \to T_{\underline{P}} \prod_G H$ assoziiert, derart daß das Diagramm:



kartesisch ist. Auf diese Weise wird ein Funktor

$\underline{T_P}$-G-Paar $\to$ $(\underline{T_P} \prod_G H)$-H-Paar definiert.

Lemma 5.3. Der oben definierte Funktor bewirkt eine Äquivalenz.

Beweis: Sei $(Q,1) \in Ob((\underline{T_P} \prod_G H)$-H-Paar$)$; definieren wir

$P := Q \prod_{\underline{T_P} \prod_G H} \underline{T_P}$, so wird f als die kanonische Abbildung

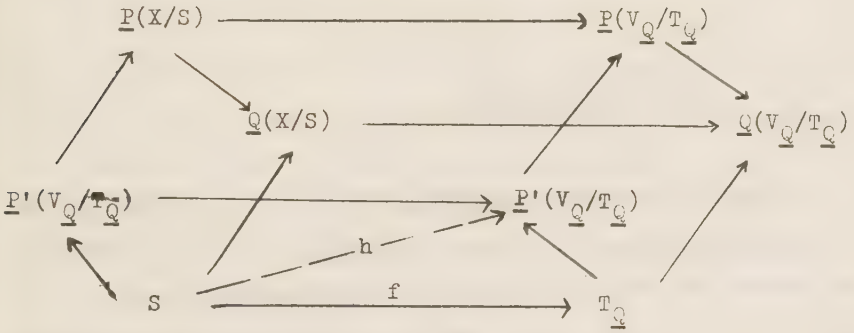
$P \to \underline{T_P}$ definiert.

Dann ist P ein G-Prinzipalbündel, weil aus $u \cdot p = p$ (mit $u \in G$ und $p \in P$) folgt: $uf(p) = f(p)$. Da $\ker \varphi$ frei auf $\underline{T_P}$ operiert, folgt entweder $u \in G - \ker \varphi$ oder u ist das Einselement. Im ersten Fall ergibt sich ein Widerspruch zu der Aussage, daß Q ein H-Prinzipalbündel ist; deshalb ist u das Einselement. Wegen $P \prod_G H \approx Q$, folgt sofort, daß diese Abbildungen die obengenannte Äquivalenz bewirken.

Wir kehren zum Beweis des Satzes zurück. Gibt man eine $\underline{Q}$-Kurve vor, so ist das nach Satz 4.4 und Lemma 5.1 mit der Angabe eines Paares (Q,1) wie im Lemma 5.1 und eines S-Isomorphismus $Q \approx S \times H$, gleichwertig also mit der Angabe eines Morphismus $f : S \to P \prod_G H$. Nach der Bemerkung 4.5 ist die Kategorie der $\underline{Q}$-Kurven durch $P \prod_G H$ darstellbar.

3) Wenn man für jeden analytischen Raum S und jede $\underline{Q}$-Kurve X über S definiert: $\underline{P}'(X/S) := \underline{P}(X/S) \prod_{\underline{Q}(X/S)} S$ (und mit der entsprechenden Definition für Morphismen), erscheint $\underline{P}'$ als ein $\underline{An}$-Funktor aus der Kategorie der $\underline{Q}$-Kurven in der Kategorie

ker φ-PB. Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der $\underline{P}$-Strukturen auf $X \in \underline{C}^g_S$ und der Menge der $\underline{P}'$- und der $\underline{Q}$-Strukturen. Sei $\eta : S \to \underline{P}(X/S)$ eine $\underline{P}$-Struktur auf X und η' (bzw. η'') die zusammengesetzte $\underline{Q}$-Struktur: $S \xrightarrow{\eta} \underline{P}(X/S) \to \underline{Q}(X/S)$ (bzw. die durch die universelle Eigenschaft des Faserproduktes induzierte $\underline{P}'$-Struktur $S \to \underline{P}'(X/S)$). Sei $f : S \to T_{\underline{Q}}$ die mit η' assoziierte Abbildung. Auf kanonische Weise erhält man eine ker φ-Abbildung: $\underline{P}'(X/S) \to \underline{P}'(X_{\underline{Q}}/T_{\underline{Q}})$, so daß alle Vierecke des Diagramms



kartesisch sind. Die Angabe von η ist letzlich mit der Angabe von $h : S \xrightarrow{\eta''} \underline{P}'(X/S) \to \underline{P}'(V_{\underline{Q}}/T_{\underline{Q}})$ äquivalent.

Nach Bemerkung 4.5 ist die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven durch $\underline{P}'(V_{\underline{Q}}/T_{\underline{Q}})$ darstellbar.

4) Wir unterscheiden zwei Fälle: φ ist surjektiv und φ ist injektiv; der allgemeine Fall läßt sich auf diese beiden Fälle zurückführen.

Ist φ injektiv, dann ist $T_{\underline{Q}}$ eine (card H/G)-fache direkte Summe von $T_{\underline{P}}$, und für ein beliebiges Element $(x,\psi(h))$ von $T_{\underline{Q}}$ ist der Stabilisator von $(x,\psi(h))$ in H gleich dem Stabi-

lisator von x in G. Ist V eine offene Umgebung von x mit der Eigenschaft $V \cap \bar{u}(V) = \emptyset$ für alle $u \notin St(x)$, so ist $(V,\Psi(h))$ eine Umgebung von $(x,\Psi(h))$ mit $(V,\Psi(h)) \cap \bar{h}'(V,\Psi(h)) = \emptyset$ für alle $h' \in H - St((x,\Psi(h))$ und umgekehrt.

Sei φ surjektiv; operiert G eigentlich auf $T_{\underline{P}}$, dann folgt aus dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_{\underline{P}} \times G & \longrightarrow & T_{\underline{P}} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi \times \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T_{\underline{Q}} \times H & \longrightarrow & T_{\underline{Q}} \end{array}$$

daß H eigentlich auf $T_{\underline{Q}}$ operiert, da $T_{\underline{P}} \to T_{\underline{Q}}$ surjektiv ist. Sei φ surjektiv, und H operiere eigentlich auf $T_{\underline{Q}}$. Erstens ist der Stabilisator $St(x)$ endlich ($x \in T_{\underline{P}}$ beliebig); dann $\varphi(St(x))$ ist in der endlichen Menge $St(\pi(x))$ enthalten. Für jedes $h \in \varphi(St(x))$ gibt es nur endlich viele $u \in St(x)$ mit der Eigenschaft $\varphi(h) = u$, weil der Stabilisator von x bezüglich $\ker \varphi$ (der mit obengenannter Menge bijektiv ist) endlich ist.

Zweitens: Für $x \in T_{\underline{P}}$ wähle man eine Umgebung V von x so klein, daß folgendes gilt:

a) $V \cap \bar{u}(V) = \emptyset$ für jedes $u \in \ker \varphi - St(x)$;

b) $\pi^{-1}(\pi(x)) \cap V = \{x\}$;

c) es gibt eine Umgebung W von $\pi(x)$ mit $\pi(V) \subset W$ und $W \cap \bar{h}(W) = \emptyset$ für alle $h \in H - St(\pi(x))$.

Nehmen wir an, daß es für jede Umgebung $V_n \subset V$ von x ein $u_n \in G - (\ker \varphi \cup St(x))$ gibt mit $V_n \cap \bar{u}_n(V_n) \neq \emptyset$. Dann ist $\varphi(u_n) \in St(\bar{u}(x))$. Daraus folgt: $u_n \in St(x)$, da $\pi^{-1}\pi(x) \cap V = \{x\}$. Widerspruch!

Korollar 5.4. Seien G und H zwei beliebige diskrete Gruppen. Sei $\underline{P}$ (bzw. $\underline{Q}$) ein G- (bzw. H-) starrer Funktor. Genau dann existiert das darstellbare Objekt $T_{\underline{P}}$, auf dem G eigentlich operiert, wenn $T_{\underline{Q}}$ existiert, auf dem H eigentlich operiert.

Beweis: Wir betrachten das Produkt $\underline{P} \times \underline{Q}$. Das ist ein $G \times H$-starrer Funktor, und es gibt zwei kanonische $\underline{An}$-funktorielle Morphismen: $\underline{P} \times \underline{Q} \to \underline{P}$ und $\underline{P} \times \underline{Q} \to \underline{Q}$, die den Projektionen $G \times H \to G$ und $G \times H \to H$ entsprechen. Setzen wir voraus, daß $T_{\underline{P}}$ existiert und G auf $T_{\underline{P}}$ eigentlich operiert. Dann ist $\underline{P} \times \underline{Q}$ auch starr und es gilt:

$$T_{\underline{P}\times\underline{Q}} \approx T_{\underline{P}} \times \underline{Q}(V_{\underline{P}}/T_{\underline{P}}) \; !$$

Da $\ker (G \times H \to G) = \{1\} \times H$ auf $T_{\underline{P}\times\underline{Q}}$ eigentlich operiert (weil $\underline{Q}(V_{\underline{P}}/T_{\underline{P}})$ ein H-Prinzipalbündel ist), folgt: $G \times H$ operiert eigentlich auf $T_{\underline{P}\times\underline{Q}}$, und da $\underline{Q}$ starr ist, existiert (nach Satz 5.2.2)) $T_{\underline{Q}}$, und H operiert eigentlich auf $T_{\underline{Q}}$.

Satz 5.5. Sei $\underline{P}$ ein G-starrer Funktor, derart daß:

a) G auf $T_{\underline{P}}$ eigentlich operiert;

b) $T_{\underline{P}}/G$ zusammenhängend ist.

Sei $\nu : T_{\underline{P}} \to T_{\underline{P}}/G$ die kanonische Abbildung. Dann existiert eine Gruppe G_o und ein G_o-starrer Funktor $\underline{P}_o$, so daß $T_{\underline{P}_o}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Ein solcher Funktor ist bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei T' eine Zusammenhangskomponente von $T_{\underline{P}}$ und $G' := \{g \in G: \bar{g}(T') = T'\} = \{g \in G: \bar{g}(T') \cap T' \neq \emptyset\}$. Sei $X \in \underline{C}^g_S$ und (P,f) ein mit X nach Satz 4.4 assoziiertes Paar. Sei $q : P \to S$ die Abbildung, die P als S-Bündel definiert. Durch $\underline{P}'(X/S) := \bar{f}^1(T')$ ist dann ein An-Funktor $\underline{C}^g \to \underline{G'\text{-PB}}$ gegeben (für Morphismen ist $\underline{P}'$ kanonisch definierbar). In der Tat, da erstens $T_{\underline{P}}/G$ zusammenhängend ist, folgt $\nu(\bigcup_{g \in G} \bar{g}(T')) = T_{\underline{P}}/G$. Deshalb existiert für jedes $p \in P$ ein $p' \in \underline{P}'(X/S)$, mit $f(p') = f(p)$ und $q(p') = q(p)$. Zweitens gilt $p' \cdot g \in P'(X/S)$ für $p' \in \underline{P}'(X/S)$ dann und nur dann, wenn $g \in G'$!

Sei T_o eine universelle Überlagerung von T'; T_o ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend.

Sei G_o die Gruppe der Automorphismen von T_o, die mit den Automorphismen $\bar{g}'$ von $T'(g' \in G')$ verträglich sind. Wenn durch $\pi_o(T')$ die Fundamentalgruppe von der Überlagerung $T_o \to T'$ bezeichnet ist, dann ist G_o eine Erweiterung von G' durch $\pi_o(T')$.

Die Formel $\underline{P}_o(X/S) := \underline{P}'(X/S) \times_{T'} T_o$ definiert einen Funktor $\underline{C}^g \to \underline{G_o\text{-PB}}$, weil G_o frei auf $\underline{P}_o(X/S)$ operiert, da G' auf $\underline{P}'(X/S)$ frei operiert und die von 1 verschiedenen Elementen

der $\pi_o(T')$ keine Fixpunkte haben und weil gilt:

$\underline{P}_o(X/S)/G_o = (P_o(X/S)/\pi_o(T'))/G' = \underline{P}'(X/S)/G' = S!$

Außerdem sind $\underline{P}_o$ und $\underline{P}'$ starre Funktoren, da $\underline{P}$ starr ist und die funktoriellen Morphismen $\underline{P}_o \to \underline{P}' \to \underline{P}$ den Gruppenhomomorphismen $G_o \to G' \to G$ entsprechen. Laut Satz 5.2 ist T' (bzw. T_o) ein Repräsentant für die Kategorie der $\underline{P}'$ (bzw. $\underline{P}_o$)-Kurven.

Aus Korollar 4.8 folgt, daß jeder G_1-starre Funktor $\underline{P}_1$ mittels eines Gruppennomomorphismus $G_o \xrightarrow{\chi} G_1$ definierbar ist. Laut Satz 5.2 ist $T_{\underline{P}_1}$ zusammenhängend, genau dann, wenn χ surjektiv ist. Ist dies der Fall, so ist $T_{\underline{P}_o} \xrightarrow{\bar{\chi}} T_{\underline{P}_1} = T_{\underline{P}_o}/\ker \chi$ eine unverzweigte Überlagerung. Da $T_{\underline{P}_o}$ einfach zusammenhängend ist, ist $T_{\underline{P}_1}$ genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\bar{\chi}$ ein Isomorphismus ist, d.h. die Zahl der Blätter der Überlagerung ist gleich 1, d.h. $G_o \to G_1$ ist injektiv. Damit haben wir die Eindeutigkeit (bis Isomorphismus) von $\underline{P}_o$ bewiesen.

Wir haben bereits im zweiten Paragraphen die Funktoren $\underline{T}$, $\underline{\mathfrak{T}}$, $\underline{J}_n$ auf $\underline{C}^g$ definiert und bemerkt, daß die mittels der Gruppenhomomorphismen $\gamma \to SP(g,\underline{Z}) \to SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$ aus $\underline{T}$ entstandenen Funktoren bis auf funktorielle Isomorphismen genau die Funktoren $\underline{\mathfrak{T}}$ und $\underline{J}_n$ sind.

Wir werden beweisen, daß a) diese Funktoren starr sind; b) die Kategorie der $\underline{T}$ (bzw. $\underline{\mathfrak{T}}$, $\underline{J}_n$)-Kurven darstellbar ist; c) $T_{\underline{T}}$ (bzw. $T_{\underline{\mathfrak{T}}}$, $T_{\underline{J}_n}$) eine $(3g-3)$-dimensionale komplexe analytische Mannigfaltigkeit ist.

Nehmen wir an, daß diese Behauptungen gelten. Dann stellt das folgende Lemma den Zusammenhang zwischen den ersten zwei Paragraphen her.

Lemma 5.6. Die analytischen Räume $T_{\underline{T}}$ und T_g sind isomorph.

Bemerkung. Das gleiche gilt auch für das Paar $\mathfrak{T}_g$ und $T_{\mathfrak{T}}$ (bzw. $J_{n,g}$ und T_{J_n}). Der Beweis hierfür ergibt sich aus Satz 5.2 und Lemma 2.3.

Es ist bekannt, daß mengentheoretisch $T_{\underline{T}}$ mit $\underline{T}(X_o/p_o)$ kanonisch isomorph ist. Deshalb können wir ohne weiteres sagen: Die zugrundeliegenden Mengen von $T_{\underline{T}}$ und T_g sind identisch.

Wegen des am Ende des ersten Paragraphen erwähnten Theorems von Bers und der Rolle von $T_{\underline{T}}$ gibt es eine (und nur eine) analytische Abbildung

$$(f_o, f_1) = f : T_g \to T_{\underline{T}}$$

derart, daß $f^*(V_{\underline{T}}, \xi_{\underline{T}}) \approx (V_g, \xi_g)$ gilt.

Nach obigen Überlegungen ist f_o genau die identische Abbildung. Da $T_{\underline{T}}$ reduziert ist (sogar eine Mannigfaltigkeit), ist f die identische Abbildung!

§ 6. Starrheit des Funktors $\underline{J}_n$ für $n \geq 3$

Wie wir schon durch die Überschrift angedeutet haben, besteht das Ziel dieses Paragraphen im Beweis folgenden Satzes:

Theorem 6.1. Der Funktor $\underline{J}_n$ $(n \geq 3)$ ist starr.

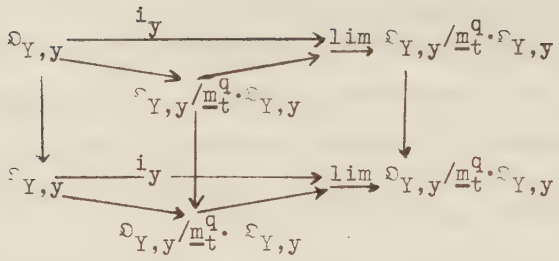
Beweis. Sei eine $\underline{J}_n$-Kurve (X,ξ) über S und u ein S-Automorphismus von X mit der Eigenschaft $\underline{J}_n(u) = 1_{\underline{J}_n(X/S)}$. Zu zeigen ist: $u = 1_X$!

Auf Grund des folgenden Satzes kann man annehmen: $S = p_o$.

Satz 6.2 [SC]. Sei $p : Y \to T$ ein eigentlicher, einfacher Morphismus komplexer Räume, t ein Punkt von T und v ein T-Automorphismus von Y. Wenn v auf der Faser Y_t die Identität induziert und $H^o(Y_t, \sigma_{Y_t}) = 0$ ist, dann existiert eine offene Umgebung U von t derart, daß die Beschränkung von v auf $p^{-1}(U)$ die Identität ist.

Beweis. Da Y_t kompakt ist, ist es hinreichend zu zeigen, daß die Beschränkung von u auf eine Umgebung V von Y_t die Identität ist, und dafür wird gezeigt, daß $v_y = 1_{\mathcal{O}_{Y,y}}$ für alle $y \in Y_t$ gilt (das reicht aus, weil $\mathcal{H}om_T(Y,Y)$ eine Garbe ist!)

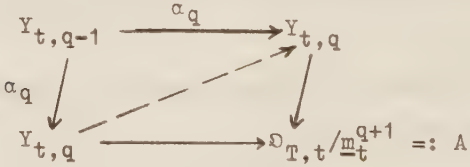
Für jedes $q \geq 0$ hat man das folgende kanonische, kommutative Diagramm von $\mathbf{C}$-Algebren:



Da i_y injektiv ist, genügt es zu beweisen, daß für alle $q \geq 0$ $v_{y,q}$ genau $1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\underline{m}_t^{q+1}\mathcal{O}_{Y,y}}$ ist.

Bezeichnet man mit $Y_{t,q}$ das Faserprodukt (in An!) $Y \times_T (\mathcal{O}_{T,t}/\underline{m}_t^{q+1})$ und mit $v_{t,q}$ die von v induzierte Abbildung $Y_{t,q} \to Y_{t,q}$, dann ist die letzte Aussage mit der Aussage "$v_{t,q} = 1_{Y_{t,q}}$ für alle $q \geq 0$" äquivalent. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion. Sei α_q die von der kanonischen Surjektion $\mathcal{O}_{Y,y}/\underline{m}_t^q \cdot \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{Y,y}/\underline{m}_t^{q-1} \cdot \mathcal{O}_{Y,y}$ induzierte Abbildung $Y_{t,q-1} \to Y_{t,q}$.

Der Fall $q = 0$ ist ein Teil der Voraussetzung. Sei $v_{t,q-1} = 1_{\mathcal{O}_{Y,y}/\underline{m}_t^q \cdot \mathcal{O}_{Y,y}}$; die Menge $E(\alpha_q)$ der Abbildungen $Y_{t,q} \to Y_{t,q}$, die das Diagramm von den komplexen Räumen



kommutativ ergänzen, ist (nach Anhang B.1) mit der Menge:

$H^0(Y_{t,q-1},\mathfrak{M}) := H^0(Y_{t,q-1}, \alpha_q^*(\sigma_{Y_{t,q}|A}) \otimes_{\mathfrak{S}_{Y_{t,q-1}}} \underline{m}_t^q/\underline{m}_t^{q+1})$

isomorph. Da die Garbe $\underline{m}_t^q/\underline{m}_t^{q+1}$ auf $Y_{t,q-1}$ konstant ist, gilt: $H^0(Y_{t,q-1},\mathfrak{M}) \approx H^0(Y_{t,q-1},\alpha^*(\sigma_{Y_{t,q}/A}))\otimes_{\mathfrak{S}_{Y_{t,q-1}}} \underline{m}_t^q/\underline{m}_t^{q+1}$!

Da $Y_{t,q-1}$ und Y_t topologisch "gleich" sind und A ein einpunktiger Raum ist, folgt: $\sigma_{Y_{t,q}/A} = \sigma_{Y_t}$ und deshalb $H^0(Y_{t,q-1},\mathfrak{M}) \approx H^0(Y_t,\sigma_{Y_t})\otimes_{\mathfrak{S}_{Y_{t,q-1}}} \underline{m}_t^q/\underline{m}_t^{q+1} = 0$. Dadurch ist bewiesen, daß $E(\alpha_q)$ nur aus einem einzigen Element besteht. Aber $1_{Y_{t,q}}$ und $v_{t,q}$ gehören der Menge $E(\alpha_q)$ an! Also ist der Satz 6.2 bewiesen.

Aus der Aussage $\underline{J}_n(u) = 1_{\underline{J}_n(X/e_o)}$ folgt (laut Definition des Funktors $\underline{J}_n$): "$H^1(u,\underline{Z}/n\underline{Z}) = 1_{H^1(X,\underline{Z}/n\underline{Z})}$". Mit $J(X)$ wird die Jakobi-Mannigfaltigkeit von X bezeichnet (für die verschiedenen äquivalenten Definitionen von $J(X)$ siehe z.B. [G]) und mit $F_n(X)$ die Menge (genauer: die Untergruppe) der Punkte vom Rang n aus $J(X)$. Dann gilt:

Lemma 6.3. Es gibt einen funktoriellen Anti-Isomorphismus: $F_n(X) \approx H^1(X,\underline{Z}/n\underline{Z})$.

Beweis. Die exakte Sequenz $0 \to \underline{Z}/n\underline{Z} \xrightarrow{\exp} \underline{\mathbb{C}}^* \xrightarrow{n} \underline{\mathbb{C}}^* \to 0$ definiert auf X die exakte Garbensequenz:

$$0 \to \underline{Z}/n\underline{Z} \to \mathfrak{S}_X^* \xrightarrow{\tilde{n}} \mathfrak{S}_X^* \to 0$$

wobei $\underline{Z}/n\underline{Z}$ die lokalkonstante Garbe auf X mit Werten in $\underline{Z}/n\underline{Z}$ ist.

Bezüglich der exakten Sequenz

$H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^1(X,\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{H^1(\tilde{n})} H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$

bemerken wir folgendes:

a) $H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^0(X,\mathcal{O}_X^*)$ ist surjektiv;

b) $F_n(J(X))$ ist mit $\ker H^1(\tilde{n})$ anti-isomorph.

Daraus folgt, daß die induzierte Abbildung:

$H^1(X,\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}}) = H^1(X,\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}}) \to F_n(J(X))$

ein Anti-Isomorphismus ist.

Folgerung 6.4. Die Beschränkung von $J(u)$ auf $F_n(X)$ ist ein Isomorphismus.

Da $\mathrm{Aut}(X)$ endlich ist (siehe z.B. [W]), gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, derart daß $u^m = 1_X$ ist; daraus folgt $J(u)^m = 1_{J(X)}$. Weiter: $J(X)$ ist mit $(\underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}})^{2g}$ funktoriell isomorph (als topologische Gruppe) und die von $J(u)$ induzierte Abbildung $(\underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}})^{2g} \to (\underline{\mathbb{R}}/\underline{\mathbb{Z}})^{2g}$ ist durch eine ganzzahlige $2g \times 2g$ Matrix gegeben.

Da diese Matrix die Punkte n-ter Ordnung invariant läßt, ist sie von der Gestalt $I + nA$, wobei A wieder eine ganzzahlige $2g \times 2g$ Matrix ist. Sei p eine Primzahl, die n teilt (wenn es möglich ist, wählt man $p \neq 2$; sonst gilt: $n=2^l$ mit $l \geq 2$).

Es gilt: $nA = p^k B$ und $m = p^s \cdot q$, wobei die ganzzahlige $2g \times 2g$ Matrix B und die natürliche Zahl q durch p nicht mehr teilbar sind.

Da $(I+p^kB)^m = I$ ist, folgt:

$$(6.1.1) \quad p^{k+s} \cdot q \cdot B + p^{2k+s} \cdot \frac{q(m-1)}{2} \cdot B^2 + \ldots + p^{km} \cdot B^m = 0.$$

Wegen $s+k+1 \leq s+2k$ und $s+k+1 \leq k \cdot p^s \cdot q$ folgt in allen Fällen aus (6.1.1):

(6.1.2) $p^{s+k} \cdot q \cdot B + p^{s+k+1} \cdot C = 0$, wobei C eine ganzzahlige Matrix ist. Daraus schließen wir: p teilt $q \cdot B$. Da $q \geq 1$ ist und p weder q noch B teilt, folgt $B = 0$, d.h. $A = 0$, d.h. $J(u) = 1_{J(X)}$.

Wir untersuchen jetzt die Lefschetzzahl $\lambda(u)$ von u, oder genauer gesagt, ob u wenigstens einen Fixpunkt hat (d.h. ob $\lambda(u)$ ungleich Null ist).

Zuerst führen wir eine Bezeichnung ein: Sei $a_1,\ldots,a_g$, $b_1,\ldots,b_g$ eine Basis von $H^1(X,\underline{Z})$ und $\varphi_1,\ldots,\varphi_g$ die Basis des Vektorraums $\Gamma(X,\Omega_X)$ der geschlossenen holomorphen Differentialformen ersten Grades, für die gilt: $\int_{b_j} \varphi_i = \delta_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,g)$.

Sei $Q \in X$ ein beliebiger, fest gewählter Punkt von X. Die durch $P \to (\int_Q^P \varphi_1,\ldots,\int_Q^P \varphi_g)$ definierte Einbettung von X in $J(X)$ wird mit i_Q bezeichnet.

Da u orientierungstreuer Morphismus ist, gilt $H^2(u) = 1_{H^2(X,\underline{Z})}$.

Das Lefschetzdualitätstheorem:

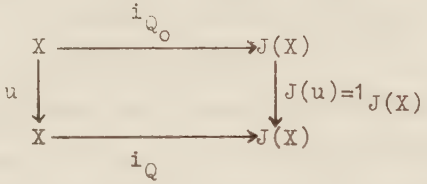
$H^q(J(X),X;\underline{Z}) \approx H^{2g-q}(J(X)-X;\underline{Z})$, die exakte Sequenz:

$$H^1(J(X).X;\underline{Z}) \to H^1(J(X);\underline{Z}) \xrightarrow{H^1(i_Q)} H^1(X,\underline{Z}) \to H^2(J(X),X;\underline{Z})$$

und der Homöomorphismus zwischen $J(X)-X$ und der offenen Einheitskugel im $\underline{\mathbb{R}}^{2g}$ zeigen, daß $H^1(i_Q)$ ein Isomorphismus ist.

Deshalb ist $H^1(u)$ die identische Abbildung, und daher ist $\lambda(u) = \text{Spur}(H^0(u)) - \text{Spur}(H^1(u)) + \text{Spur}(H^2(u)) = 1-2g+1 = 2(1-g) \neq 0$.

Sei Q_0 ein Fixpunkt von u. Dann hat man das folgende kommutative Diagramm:



weil i_{Q_0} eine Einbettung ist, ist u genau die Identität.

Das Theorem 6.1 ist damit vollständig bewiesen.

§ 7. Die Darstellbarkeit des Funktors $\mathfrak{C}_R$

Seien $g \geq 3$ und $k \geq 2$ zwei feste, natürliche Zahlen, dann ist für jede g-Kurve $f : X \to S$, $(\Omega^1_{X/S})^{\otimes k} =: \mathfrak{L}_{X/S}$ sehr ample bezüglich f (siehe Anhang A.4).

Laut Anhang A.2 ist $\mathfrak{F}_{X/S} := f_*(\mathfrak{L}_{X/S})$ lokal frei und für jedes kartesisches Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

gilt:

$$\mathfrak{F}_{X'/S'} \approx g^*(\mathfrak{F}_{X/S}). \tag{7.1.1}$$

Daraus folgt, daß der Rang von $\mathfrak{F}_{X/S}$ nur von g und k abhängt. Mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch kann man diesen Rang r rechnen.

In der Tat, für $S = p_o$ ist X eine gewöhnliche Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Aus $\dim H^0(X,(\Omega^1_X)^{\otimes k}) = 1-g-\operatorname{grad}(-k\cdot K) = 1-g+k\cdot\operatorname{grad} K = (g-1)(2k-1)$ und $H^1(X,(\Omega^1_X)^{\otimes k}) = 0$ (K bezeichnet die kanonische Klasse) folgt:

$$r = \dim H^0(X,(\Omega^1_X)^{\otimes k}) = (2k-1)\cdot(g-1).$$

Da $\mathfrak{F}_{X/S}$ lokal frei von Rang r ist, folgt, daß eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ von S und ein Cozyklus $(c_{ij})_{i,j\in I}$ $H^1(\mathfrak{U},\mathfrak{S}^r_S)$ existieren, so daß die Beschränkung von $\mathfrak{F}_{X/S}$ auf

U_i frei ist (d.h. es gibt einen Isomorphismus $d_i : \mathfrak{C}_{X/S}|U_i \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_{U_i}^r$) und (c_{ij}) als die dem Homomorphismus $d_j|_{U_i \cap U_j} \cdot d_i^{-1}|_{U_i \cap U_j}$ assoziierte Matrix interpretierbar ist.

Mit $\underline{R}(X/S)$ wird das Prinzipalbündel über S bezeichnet, das als Faser die lineare, komplexe Gruppe $G := Gl(r,\underline{\mathbb{C}})$ hat und dem Cozyklus $(c_{ij})_{i,j\in I}$ assoziiert ist.

Aus (7.1.1) folgt, daß $\underline{R}$ einen kartesischen $\underline{An}$-Funktor $\underline{C}^{\mathcal{E}} \to \underline{G\text{-PB}}$ definiert.

Jedem S-Schnitt $S \to \underline{R}(X/S)$ entspricht genau eine Basis $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_r)$ von $\mathfrak{C}_{X/S}$ (also ein Isomorphismus $\mathfrak{C}_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_S^r$).

Eine solche Basis $(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ von $\mathfrak{C}_{X/S}$ heißt eine <u>lineare Starrheit</u> von X.

<u>Lemma 7.1.</u> $\underline{R}$ ist ein starrer Funktor.

<u>Beweis.</u> Sei $u : X \to X$ ein S-Automorphismus, der eine lineare Starrheit ω von X invariant läßt. Ihm entspricht ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_{\mathcal{E}}} & P(\mathfrak{C}_{X/S}) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(u)} \\ X & \xrightarrow[i_{\mathcal{E}}]{} & P(\mathfrak{C}_{X/S}) \end{array}$$

Da u die lineare Starrheit ω unberührt läßt, ist $P(u)$ die Identität. Dann ist auch u die Identität, weil $i_{\mathcal{E}}$ eine Einbettung ist.

Bemerkung 7.2. Jedem starren Funktor $\underline{P}$ entspricht ein Funktor:

$$G_{\underline{P}} : \underline{An}^{o} \to \underline{Ens}$$

der auf folgende Weise definiert ist: $G_{\underline{P}}(S)$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $\underline{P}$-Kurven über S bezüglich der Isomorphierelation.
Die Äquivalenzklasse der $\underline{P}$-Kurve (X,r) wird durch $[X,r]$ bezeichnet.

Statt zu sagen, daß die Kategorie der $\underline{P}$-Kurven darstellbar ist, ist es gleichbedeutend zu sagen, daß der Funktor $G_{\underline{P}}$ darstellbar ist. Ferner ist ein Paar $(T,[V,\xi])$ genau dann ein darstellendes Paar für $G_{\underline{P}}$, wenn $\xi : T \to \underline{P}(V/T)$ eine $\underline{P}$-universelle Struktur ist.

In unserem Fall (d.h. $\underline{R}$ statt $\underline{P}$) operiert die Gruppe G auf $G_{\underline{R}}$, d.h. genauer gesagt, es existiert ein funktorieller Morphismus, der auf folgende Art erklärbar ist: Für jedes $S \in \mathrm{Ob}\ \underline{An}$ sei $\xi(S)$ definierbar durch

$$\xi(S)\,([X,(\omega_i)],(a_{ij})) := [X,(\omega_i)\cdot(a_{ij})].$$

Das folgende Lemma macht die Definition von $G_{\underline{R}}$ klarer.

Lemma 7.3. Die Angabe einer $\underline{R}$-Kurve (X,ω) über S ist äquivalent der Angabe eines komplexen Unterraumes X von $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{C})\times S$, der gleichzeitig vermöge f eine g-Kurve über S ist, und eines Isomorphismus von $i_f^*(\mathcal{O}_P(1))$ auf $\mathcal{O}_{X/S}$, der einen Isomorphismus $\mathcal{O}_S^r = \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_P(1)) \cong \mathcal{O}_{X/S} = f_*(\mathcal{O}_{X/S})$ induziert, wobei

$pr : \mathbb{P}^{r-1}(\underline{\mathbb{C}}) \times S \to S$ die Projektion ist, $i_{\mathcal{L}}$ die Einbettung $X \to P(\mathcal{C}_{X/S}) \approx \mathbb{P}^{r-1}(\underline{\mathbb{C}}) \times S$ ist und f als $pr \cdot i_{\mathcal{L}}$ definiert ist.

Beweis. Da die lineare Starrheit $\varkappa$ nichts anderes als ein Isomorphismus $\mathcal{O}_S^r \cong \mathcal{C}_{X/S}$ ist, folgt das Lemma aus Anhang A.3.

Das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels besteht aus:

Satz 7.4. Der kontravariante Funktor $G_{\underline{R}}$ ist darstellbar durch eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $3g - 3 + r^2$.

Beweis. Wir werden eine Reihe von Funktoren und Morphismen zwischen ihnen definieren; da die Wirkung dieser Funktoren auf Morphismen auf offensichtliche, kanonische Weise definierbar ist, werden wir uns darauf beschränken, die Zuordnung für die Objekte anzugeben.

Sei $D : \underline{An}^o \to \underline{Ens}$ der Funktor, der jedem $S \in Ob\ \underline{An}$ die Menge aller abgeschlossenen Unterräume von $\mathbb{P}^{r-1}(\underline{\mathbb{C}}) \times S$ zuordnet, die gleichzeitig vermöge der Projektion g-Kurven über S sind.

Dieser Funktor ist darstellbar (ein spezieller Fall des Hauptergebnisses von [D]).

Wenn wir den Funktor $G_{\underline{R}}$ mittels Lemma 7.3 interpretieren, dann gibt es einen funktoriellen Morphismus $\delta : G_{\underline{R}} \to D$. Die Darstellbarkeit von $G_{\underline{R}}$ ist mit der Darstellbarkeit von δ äquivalent, d.h. wir müssen beweisen, daß für jedes $S \in Ob\ \underline{An}$ und $X \in D(S)$ der Funktor $G_{\underline{R},X}$ darstellbar ist. Aber für $T \in Ob(\underline{An}/S)$ ist

$G_{\underline{R},X}(T)$ genau die Menge aller Isomorphismen
$\lambda : i_T^*(\mathcal{O}_{P_T^r}(1)) \cong \mathcal{L}_{X_T/T}$, derart daß der assoziierte Morphismus
$\tilde{\lambda} : \mathcal{O}_T^r \to \mathcal{E}_{X_T/T}$ auch ein Isomorphismus ist.

Sei $G_X : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$ der Funktor, der jedem T die Menge der Isomorphismen $i_T^*(\mathcal{O}_{P_T^r}(1)) \cong \mathcal{L}_{X_T/T}$ assoziiert. Dann existiert ein funktorieller Morphismus $\varepsilon : G_{\underline{R},X} \to G_X$, so daß $\varepsilon(T)$ für jedes $T \in Ob(\underline{An}/S)$ eine Inklusion ist.

Seien $\mathfrak{W},\mathfrak{N} \in Coh\ X$; $\mathfrak{N}$ sei S-platt. Für jedes $T \in Ob(\underline{An}/S)$ sei $G_{X,\mathfrak{W},\mathfrak{N}}(T)$ die Menge aller $\mathcal{O}_X$-Isomorphismen $\mathfrak{W}_T \cong \mathfrak{N}_T$. Auf diese Weise definiert man einen Funktor $G_{X,\mathfrak{W},\mathfrak{N}} : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$. Für jedes T ist die Menge $G_X(T)$ in $G_{X,\mathcal{O}_{P_S^r}(1),\mathcal{L}_{X/S}}(T)$ enthalten, und deshalb existiert ein funktorieller Morphismus:

$$\alpha : G_X \to G_{X,\mathcal{O}_{P_S^r}(1),\mathcal{L}_{X/S}}.$$

Aus Anhang D.2 (Beispiel a)) folgt, daß α und ε darstellbare Morphismen sind.

Deshalb wird die Darstellbarkeit von $G_{\underline{R},X}$ (und letztlich die von $G_{\underline{R}}$) mittels des folgenden Lemmas vollständig bewiesen:

Lemma 7.5. Der Funktor $G_{X,\mathfrak{W},\mathfrak{N}}$ ist darstellbar.

Beweis. Wir definieren die Funktoren:

$$H_{\mathfrak{W},\mathfrak{N}},\ H'_{\mathfrak{W},\mathfrak{N}},\ H''_{\mathfrak{W},\mathfrak{N}} : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$$

durch

$$H_{\mathfrak{W},\mathfrak{N}}(T) := Hom_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathfrak{W}_T, \mathfrak{N}_T)$$

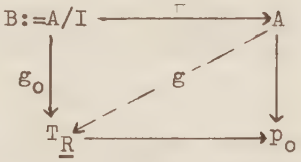
$H'_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(T) := \{\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X_T$; es gibt eine exakte Sequenz $\mathfrak{M}_T \oplus \mathfrak{N}_T \to \mathcal{F} \to 0$, so daß die Abbildung $\mathfrak{M}_T \to \mathfrak{M}_T \oplus \mathfrak{N}_T \to \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist$\}$; $H''_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(T) := \{\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X_T$; $\mathcal{F}$ ist T-platt und es gibt eine exakte Sequenz $\mathfrak{M}_T \oplus \mathfrak{N}_T \to \mathcal{F} \to 0\}$.

Da für jedes $T \in \mathrm{Ob}(\underline{An}/S)$, $G_{X,\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(T)$ in $H_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(T)$ enthalten ist und $\mathfrak{N}_T$ T-platt ist, existieren die funktoriellen Morphismen: $G_{X,\mathfrak{M},\mathfrak{N}} \overset{\varphi}{\to} H_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} \cong H'_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} \overset{\psi}{\to} H''_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$, deren Erklärung überflüssig ist.

φ und ψ sind darstellbare Morphismen (laut Anhang D.2 Beispiel a)), und $H''_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ ist nach [D] darstellbar. Das Lemma ist mittels D.3 Satz 1 bewiesen.

Wir kehren zum Beweis des Satzes 7.4 zurück. Mittels Anhang A.1 zeigen wir nun, daß $T_{\underline{R}}$ eine Mannigfaltigkeit ist (oder äquivalent: der Morphismus $T_{\underline{R}} \to p_o$ ist einfach).

Für jedes kommutative Diagramm



wobei A eine $\underline{\mathbb{C}}$-Algebra ist, $I \subset A$ ein Ideal mit der Eigenschaft $I^2 = 0$ ist und $\pi : A \to A/I$ die kanonische Surjektion bezeichnet, muß man eine analytische Abbildung $A \overset{g}{\to} T_{\underline{R}}$ mit $g \circ \pi = g_o$ finden. Da $T_{\underline{R}}$ den Funktor $G_{\underline{R}}$ darstellt, genügt es offensichtlich zu zeigen:

Zu jeder $\underline{R}$-Kurve (X,ω) über B gibt es eine $\underline{R}$-Kurve (X',ω') über A, derart daß $G_{\underline{R}}(\pi)[X,\omega] = [X',\omega']$ gilt.

Es genügt, X anzugeben, da dann wegen der Surjektivität des Homomorphismus $H^0(X,\mathcal{L}_{X/B}) \to H^0(X',\mathcal{L}_{X'/A})$ stets ω' existiert. Da X_{red} eine gewöhnliche Riemannsche Fläche ist, und $H^2(X,\mathcal{O}) = H^2(X_{red},\mathcal{O}_{red})$ gilt, folgt die Existenz von X' aus Anhang B.2.

Und jetzt beenden wir den Beweis mit der Berechnung der Dimension von $T_{\underline{R}}$.

Sei $x_o \in T_{\underline{R}}$ beliebig, aber fest. Da $T_{\underline{R}}$ den Funktor $G_{\underline{R}}$ darstellt und die Menge $Hom_{\underline{An}}(p_o,T_{\underline{R}})$ mit der zugrunde liegenden Menge des Raumes $T_{\underline{R}}$ isomorph ist, entspricht dem Punkt x_o eine Riemannsche Fläche X_o vom Geschlecht g und eine Basis ω_o von $H^0(X_o,\Omega_{X_o}^{\otimes k})$.

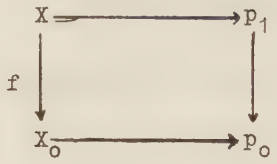
$\underline{m}_{x_o}/\underline{m}_{x_o}^2$ ist mit der Menge von Homomorphismen $f : p_1 \to T_{\underline{R}}$, mit Bild $f = \{x_o\}$, isomorph.

Aus der Definition von $G_{\underline{R}}$ und der Bedeutung von $T_{\underline{R}}$ ergibt sich, daß diese Menge mit der Menge aller $\underline{R}$-Kurven über p_1, die (X_o,ω_o) "fortsetzen", isomorph ist.

Laut Anhang B ist diese letzte Menge mit $H^1(X_o,\mathcal{G})$ isomorph. Da in diesem Fall $J = (T^2)$ ist, folgt $\mathcal{G} \sim Hom_{\mathcal{O}_{X_o}}(\Omega_{X_o},\mathcal{O}_{X_o})$.

Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt:
$\dim H^1(X_o,\mathcal{G}) = \dim H^1(X_o,Hom_{\mathcal{O}_{X_o}}(\Omega_{X_o},\mathcal{O}_{X_o})) = 3g - 3$.

Ist das Diagramm



kartesisch, so setzt jede Basis von $H^o(X,\mathfrak{T}_{X/p_1})$ die Basis ω_o fort (man ersetzt eventuell f durch $f \cdot \chi$, wobei $\chi \in \mathrm{Aut}_{p_1} X$ ist).

Wegen $\dim_{\mathbb{C}} H^o(X,\mathfrak{T}_{X/p_1}) = \dim G = r^2$ folgt:

$\dim_{x_o} T_{\underline{R}} = \dim_{\mathbb{C}}(\underline{m}_{x_o}/\underline{m}^2_{x_o}) = \dim_{\mathbb{C}}[H^1(X_o,\mathfrak{G}_{X_o}) \oplus H^o(X,\mathfrak{T}_{X/p_1})] =$

$= 3g - 3 + r^2$. Damit ist der Satz 7.3 bewiesen.

Folgerung 7.6. Es gibt einen analytischen Morphismus $\varpi_{\underline{R}} : T_{\underline{R}} \times G \to T_{\underline{R}}$, derart daß Φ mit der zusammengesetzten Abbildung

$$G_{\underline{R}} \times h_G \overset{\approx}{\to} h_{T_{\underline{R}}} \times h_G \overset{\approx}{\to} h_{T_{\underline{R}} \times G} \xrightarrow{h_{\varpi_{\underline{R}}}} h_{T_{\underline{R}}} \overset{\approx}{\to} G_{\underline{R}}$$

übereinstimmt.

Bemerkung 7.7. Da der Raum $T_{\underline{R}}$ den Funktor $G_{\underline{R}}$ darstellt, kann man die zugrunde liegende Menge des Raumes $T_{\underline{R}}$ auf folgende Weise beschreiben:

Wir betrachten die Menge aller Paare $(X;(f_1 dz^k,\ldots,f_r dz^k))$, wobei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $\forall\ x \in X$ $f_{i,x} \in \mathfrak{O}_{X,x}$ ist $(1 \le i \le r)$, derart daß $(f_1 dz^k,\ldots,f_r dz^k)$ eine

geordnete Basis des komplexen Vektorraumes der geschlossenen holomorphen Differentialformen k-ten Grades auf X ist.

Man definiert eine Äquivalenzrelation in der Menge dieser Paare wie folgt:

$$(X;(f_1dz^k,\ldots,f_rdz^k)) \sim (X';(f_1'dz'^k,\ldots,f_r'dz'^k))$$

: $\Leftrightarrow$ Es gibt einen (analytischen) Isomorphismus $X \xrightarrow{\tau} X'$, derart daß $f_i := f_i' \cdot (\frac{d\tau}{dz})^k$ gilt $(1 \le i \le r)$.

Dann ist die Faktormenge bijektiv mit $T_{\underline{R}}$!
Die Äquivalenzklasse von $(X;(f_1dz^k,\ldots,f_rdz^k))$ wird mit $[X;(f_1dz^k,\ldots,f_rdz^k)]$ bezeichnet.

Satz 7.8. Der Morphismus

$$(pr_1,\pi_{\underline{R}}): T_{\underline{R}} \times G \to T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}}$$

ist endlich.

Beweis. Zuerst machen wir folgende Bemerkung. Sei $S \in \mathrm{Ob}\,\underline{An}$ und seien (X,ω) (X',ω') zwei $\underline{R}$-Kurven über S.
Wegen der Darstellbarkeit von $C_{\underline{R}}$ entsprechen ihnen zwei Morphismen $f, f' : S \to T_{\underline{R}}$.

Sei $K(S)$ das Faserprodukt des Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow (f,f') \\ T_{\underline{R}} \times G & \xrightarrow{(pr_1,\pi_{\underline{R}})} & T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}} \end{array}$$

Dann gibt es einen Isomorphismus:

$$(7.1.2) \qquad \mathrm{Hom}_{\underline{An}}(S,K(S)) \approx \mathrm{Hom}_{T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}}}(S, T_{\underline{R}} \times G)$$

Nach Definition von $\mathfrak{T}_{\underline{R}}$ folgt:

$$(7.1.3) \qquad \mathrm{Hom}_{T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}}}(S, T_{\underline{R}} \times G) \approx \{a = (a_{ij}) \in Gl(r,\mathfrak{O}_S) : \Phi(S)([X,\omega],a) = [X',\omega']\}$$

Da $\underline{R}$ starr ist und $Gl(r,\mathfrak{O}_S)$ transitiv auf der Menge der linearen Starrheiten operiert, folgt:

$$(7.1.4) \qquad \{a \in Gl(r,\mathfrak{O}_S) : (X,\omega a) \sim (X',\omega')\} \approx \mathrm{Isom}_S(X,X')$$

Da die in (7.1.2), (7.1.3), (7.1.4) auftretenden Isomorphismen funktoriell in S sind, folgt die Existenz von $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,X')$, und zwar gilt $K(S) \approx \underline{\mathrm{Isom}}_S(X,X')$.

Sei $(x,x') \in T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}}$ und $(f,f') : p_o \to T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}}$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit: Bild $(f,f') = \{(x,x')\}$.
Seien (X,ω), (X',ω') die $\underline{R}$-absoluten Kurven, die f bzw. f' entsprechen.

Dann ist die Faser von $(\mathrm{pr}_1, \mathfrak{T}_{\underline{R}})$ im Punkt (x,x') mit der Menge von Isomorphismen zwischen den Riemannschen Kurven X und X' isomorph.

Aber diese letzte Menge ist (siehe z.B. [W]) endlich.

Die Behauptung "$(\mathrm{pr}_1, \mathfrak{T}_{\underline{R}})$ ist eigentlich" wird in [SC] mit Methoden der algebraischen Geometrie bewiesen. Ein analytischer Beweis ist mir nicht gelungen.

§ 8. Die Darstellbarkeit von $\underline{J}_n$

Sei $n \geq 3$ und $\underline{J}_n$ der n-Jakobi Funktor. Mit $\underline{Q}$ bezeichnet man das Produkt der starren Funktoren $\underline{R}$ und $\underline{J}_n$; dann ist auch $\underline{Q} : \underline{C}^g \to G \times SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z}) - PB$ ein starrer Funktor.

Satz 8.1. Der Funktor $\underline{Q}$ ist darstellbar durch eine komplexe Mannigfaltigkeit, die in jedem Punkt die Dimension $3g - 3 + r^2$ hat.

Beweis. Zum Beweis der Darstellbarkeit von $G_{\underline{Q}}$ genügt es zu zeigen, daß die funktorielle Projektion $p_{\underline{R}} : G_{\underline{Q}} \to G_{\underline{R}}$, die man durch Verzicht auf die $\underline{J}_n$-Struktur erhält, darstellbar ist.

Sei $S \in \underline{An}$ und $\eta = [X,\omega] \in G_{\underline{R}}(S)$.

Für jeden Morphismus $f' : S' \to S$ (d.h. für jedes Objekt S' von $\underline{An}/S$) gilt:

$$G_{\underline{Q},\eta}(S') = \{[X';\omega',\sigma] \in G_{\underline{Q}}(S') : (X',\omega') \sim f^*(X,\omega)\}.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$G_{\underline{Q},\eta}(S') \approx \{\sigma;\sigma : S' \to \underline{J}_n(X'/S') \text{ eine } \underline{J}_n\text{-Struktur}\} \approx$$

$$\approx \mathrm{Hom}_{\underline{An}/S}(S', \underline{J}_n(X/S)) ,$$

wobei der letzte Isomorphismus wegen $\underline{J}_n(X'/S') \approx \underline{J}_n(X/S) \underset{S}{\times} S'$ besteht.

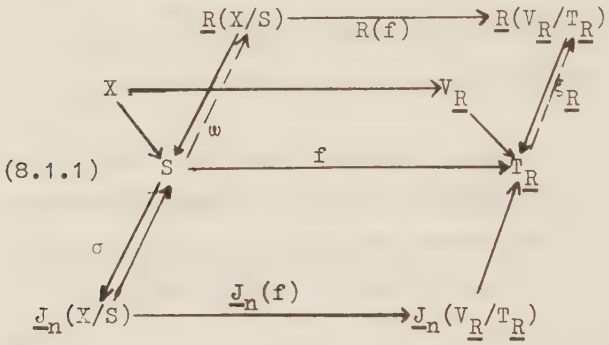
Sei $\tau_{\underline{R}} : T_{\underline{R}} \to \underline{R}\,(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}})$ die universelle Struktur.

Behauptung: $G_{\underline{Q}}$ ist durch $\underline{J}_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}})$ darstellbar.

In der Tat sei $S \in \underline{An}$ und $[X;\omega,\sigma] \in G_{\underline{Q}}(S)$.

Da $(X,\omega) \in G_{\underline{R}}(S)$ gilt, existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : S \to T_{\underline{R}}$ mit $f^*(V_{\underline{R}},\xi_{\underline{R}}) \sim (X,\omega)$.

Wir betrachten nun das folgende Diagramm:



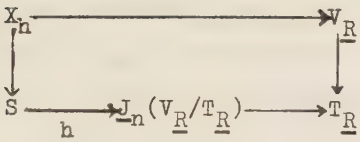
Durch die Zuordnung $[X;\omega,\sigma] \to \underline{J}_n(f)\cdot\sigma$ definiert man eine Abbildung $\beta(S) : G_{\underline{Q}}(S) \to \mathrm{Hom}_{\underline{An}}(S,\underline{J}_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}}))$, die laut Definition einen funktoriellen Charakter hat. β ist sogar ein Isomorphismus von Funktoren.

Wir definieren dafür einen Morphismus:

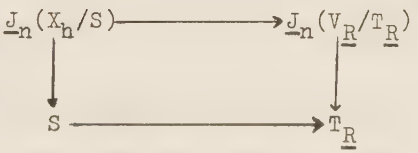
$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\underline{An}}(\ ,\underline{J}_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}})) \to G_{\underline{Q}}\ ,$$

der, wie man sofort sieht, mit β^{-1} übereinstimmt.

Für $h : S \to \underline{J}_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}})$ seien X_n das Faserprodukt des Diagramms:



und ω_h die kanonisch-induzierte $\underline{R}$-Struktur auf X_h. Da das Diagramm:



kartesisch ist, ist die Angabe von h mit der Angabe einer J_n-Struktur auf X_h, die durch σ_h bezeichnet wird, äquivalent. Dann setzen wir: $\alpha(S)(h) := [X_h;\omega_h,\sigma_h]$. Aus der Definitionsart folgt die Funktorialität von α.

Sei $q : J_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}}) \to T_{\underline{R}}$ die Abbildung, die $p_{\underline{R}}$ darstellt. Da $SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$ eine diskrete (sogar endliche) Gruppe ist, folgt nach Satz 7.3, daß $T_{\underline{Q}} = J_n(V_{\underline{R}}/T_{\underline{R}})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit von der Dimension $3g - 3 + r^2$ in jedem Punkt ist.

Damit ist der Satz 8.1 bewiesen.

Die Gruppe G, die als Untergruppe von $G \times SP(g,\underline{Z}/n\underline{Z})$ betrachtet werden kann, operiert frei auf $T_{\underline{Q}}$; für jeden analytischen Raum S operiert ferner $G(S) := Gl(r,\mathfrak{O}_S)$ frei auf $G_{\underline{Q}}(S)$.

In der Tat seien $[X;\omega,\sigma] \in G_{\underline{Q}}(S)$ und $g \in G(S)$ derart, daß g die Äquivalenzklasse $[X;\omega,\sigma]$ invariant läßt. Es gibt also einen S-Automorphismus u von X, so daß $(X,\omega) \sim (X,\omega\cdot g)$ gilt und die J_n-Struktur σ bei u invariant bleibt.

$\underline{J}_n$ ist aber starr; deshalb ist u die Identität von X. Da $G(S)$ frei auf die Menge der $\underline{R}$-Strukturen von X über S operiert, folgt: g ist das Einselement von $G(S)$. In dem kanonisch-definierten Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{\underline{Q}} \times G & \xrightarrow{(pr_1, \pi_{\underline{Q}})} & T_{\underline{Q}} \times T_{\underline{Q}} \\ \downarrow{\scriptstyle q \times 1_G} & & \downarrow{\scriptstyle q \times q} \\ T_{\underline{R}} \times G & \xrightarrow[(pr_1, \pi_{\underline{R}})]{} & T_{\underline{R}} \times T_{\underline{R}} \end{array}$$

ist die Abbildung $(pr_1, \pi_{\underline{Q}})$ nach Satz 7.6 eigentlich. Da $SP(g, \underline{Z}/n\underline{Z})$ endlich ist, ist q eigentlich und separiert, und deshalb auch $q \times 1_G$ und $q \times q$.

Daraus folgt auf einfache Weise, daß $(pr_1, \pi_{\underline{R}})$ auch eigentlich ist! Dadurch ist die folgende Ergänzung zu Satz 8.1 bewiesen:

Satz 8.2. Die Gruppe G operiert frei auf der Menge der $\underline{Q}$-Kurven, und die kanonische Abbildung $T_{\underline{Q}} \times G \to T_{\underline{Q}} \times T_{\underline{Q}}$ ist ein eigentlicher Monomorphismus.

Jetzt betrachten wir die andere Projektion $p_{\underline{J}_n} : C_{\underline{Q}} \to C_{\underline{J}_n}$.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Theorem 8.3. Der Funktor $\underline{J}_n$ ist darstellbar. $T_{\underline{J}_n}$ ist eine $3g - 3$ dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Nach Bemerkung 7.2 ist es äquivalent zu zeigen, daß $G_{\underline{J}_n}$ darstellbar ist; dieses folgern wir aus Anhang D.5, indem wir zeigen, daß die Bedingungen des dortigen Satzes erfüllt sind.

Die Menge $\mathfrak{S}$ ist in diesem Falle die Menge der surjektiven und einfachen Morphismen aus $\underline{An}$.

a) Sei $\eta = [X,\sigma] \in G_{\underline{J}_n}(S)$, dann ist $G_{\underline{Q},\eta}$ mit $\mathrm{Hom}_{\underline{An}}(-,\underline{R}(X/S))$ isomorph, wie es die folgenden Isomorphismen zeigen: $G_{\underline{Q},\eta}(T) = \{[Y;\omega,\tau] \in G_{\underline{Q}}(T);(Y,\tau) \sim (X_T,\sigma_T)\} \approx$

$\approx \{\omega;\omega : T \to \underline{R}(Y/T)$ eine $\underline{R}$-Struktur$\} \approx \mathrm{Hom}_{\underline{An}/S}(T,\underline{R}(X/S))$.

Der letzte Isomorphismus besteht wegen $\underline{R}(Y/T) \approx \underline{R}(X/S) \underset{T}{\times} S$.

Da $\underline{R}$ Werte in $\underline{G\text{-PB}}$ annimmt, gehört die Abbildung $\underline{R}(X/S) \to S$ zu $\mathfrak{S}$.

b) Sei $f : T \to S$ ein einfacher und surjektiver Morphismus. Laut Anhang gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von S, so daß $f|_{f^{-1}(U_i)}$ einen U_i-Schnitt besitzt.

Sei S' die direkte Summe von $(U_i)_{i\in I}$ und $T' := T \underset{S}{\times} S'$. Dann existiert ein S-Schnitt für $T' \xrightarrow{f'} S'$ und deshalb ist f' ein Morphismus von "effektivem Descente" für alle Funktoren $\underline{An} \to \underline{Ens}$. Dieselbe Eigenschaft besitzt auch die Abbildung $f'' : T'' \to S''$, wobei $S'' := S' \underset{S}{\times} S'$, $T'' := T' \underset{S'}{\times} S'' \sim T \underset{S}{\times} S''$.

$G_{\underline{J}_n}$ ist ein LN-Funktor (siehe Anhang D.4); deshalb sind in dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
G_{\underline{J}_n}(S) & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T) & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T \underset{S}{\times} T) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G_{\underline{J}_n}(S') & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T') & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T' \underset{S'}{\times} T') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G_{\underline{J}_n}(S'') & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T'') & \longrightarrow & G_{\underline{J}_n}(T'' \underset{S''}{\times} T'')
\end{array}$$

alle Spalten exakt. Die letzten zwei Zeilen sind auch exakt, da $T' \to S'$ und $T'' \to S''$ Morphismen von "effektivem Descente" sind. Darauf folgt, daß die erste Zeile ebenfalls exakt ist.

c) $G_{\underline{Q}} \underset{G_{\underline{J}_n}}{\amalg} G_{\underline{Q}}$ ist durch $T_{\underline{Q}} \times G$ darstellbar. In der Tat gilt:

$$(G_{\underline{Q}} \underset{G_{\underline{J}_n}}{\amalg} G_{\underline{Q}})(S) = \{([X;\omega,\sigma],[X';\omega',\sigma']) : (X,\sigma) \sim (X',\sigma')\} \approx$$

$$\approx G_{\underline{Q}}(S) \times G(S) \approx \mathrm{Hom}_{\underline{An}}(T_{\underline{Q}} \times G, S),$$ weil für je zwei $\underline{R}$-Strukturen ω,ω' auf X über S genau ein Element $g \in G(S)$ existiert mit $\omega = \omega' \cdot g$.

Wegen dieser Identifizierungen ist es klar, daß die kanonische Abbildung $G_{\underline{Q}} \underset{G_{\underline{J}_n}}{\amalg} G_{\underline{Q}} \to G_{\underline{Q}} \times G_{\underline{Q}}$ durch $(1_{T_{\underline{Q}}}, \mathfrak{B}_{\underline{Q}})$ darstellbar ist.

Laut Satz 8.2 und [ST] ist $T_{\underline{Q}}/G$ eine $3g - 3$ dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und da $T_{\underline{Q}}$ ein G-Prinzipalbündel über $T_{\underline{Q}}/G$ ist, gehört die Abbildung $T_{\underline{Q}} \to T_{\underline{Q}}/G$ zu $\mathfrak{S}$.

Anhang

A.1. Ein Morphismus $f : X \to S$ von komplexen Räumen heißt einfach im Punkt $x \in X$, wenn eine der folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1) f ist platt in x und x ist ein gewöhnlicher Punkt der Faser $f^{-1}(f(x))$.

2) Es gibt eine Umgebung V von $f(x)$, eine Umgebung U von x, eine offene Menge $W \subset \mathbb{C}^n$ und einen V-Isomorphismus $U \cong V \times W$.

3) Für jedes kommutative Diagramm in $\underline{An}$:

$$\begin{array}{ccc} A/I & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

wobei A eine lokale, analytische $\mathbb{C}$-Algebra und I ein Ideal mit der Eigenschaft $I^2 = 0$ ist, derart daß Bild $h = \{f(x)\}$ gilt, existiert ein Morphismus $k : A \to X$ mit $f \cdot k = h$.

Ein Morphismus $f : X \to S$ heißt einfach, wenn er in jedem Punkt x von X einfach ist.

A.2. Gegeben sei ein eigentlicher Morphismus von komplexen Räumen $f : X \to Y$, eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{F}$ auf X und ein Punkt $y \in Y$. Sei X_y die reduzierte Faser im Punkt y. Ist $H^1(X_y, \mathcal{F}/m_y\mathcal{F}) = 0$, so gilt:

1) $f_*(\mathcal{F})$ ist frei in einer Umgebung von y.

2) Für jede $\mathcal{O}_Y$-kohärente Garbe $\mathcal{G}$ ist der kanonische Morphismus:

$$f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{G} \to f_*(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G}))$$

ein Isomorphismus in einer Umgebung von y.

3) Für jedes kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

und für jeden Punkt y' über y (d.h. $g(y') = y$) ist der kanonische Morphismus:

$g^*(f_*(\mathcal{F})) \to f'_*(g'^*(\mathcal{F}))$ ein Isomorphismus in einer Umgebung von y'.

A.3. Projektive Bündel. Es sei S ein komplexer Raum und $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}\ \mathcal{O}_S$ eine kohärente Garbe. Man definiert einen kontravarianten Funktor:

$$\underline{P}(\mathcal{E}) : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$$

wie folgt: Für jedes Objekt (X,f) von $\underline{An}/S$ sei $\underline{P}(\mathcal{E})(X)$ die Menge aller inversiblen $\mathcal{O}_X$-Moduln, die surjektive Bilder von $f^*(\mathcal{E})$ sind. Man kann beweisen [SC], daß dieser Funktor darstellbar ist. Sein Repräsentant $(P(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{P(\mathcal{E})}(1))$ wird der Projektive Raum bezüglich $\mathcal{E}$ genannt. Außerdem gilt:

a) Für jeden Morphismus $g : S' \to S$ ist $P(g^*(\mathcal{E}))$ mit $P(\mathcal{E}) \underset{S}{\amalg} S'$ isomorph.

b) $P(\mathcal{O}_S^{r+1}) \simeq \mathbb{P}^r \times S$ und $\mathcal{O}_{P(\mathcal{O}_S^{r+1})}(1) \approx [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)] \times \mathcal{O}_S$, wobei

$\mathbb{P}^r$ der "gewöhnliche" projektive Raum ist und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ die kohärente Garbe, die z.B. in [FAC] definiert ist. Gegeben sei ein Morphismus $f : X \to S$ und $\mathcal{L} \in \mathrm{Inv}\, \mathcal{O}_X$.

Nehmen wir an, daß die Garbe $\mathcal{E} := f_*(\mathcal{L})$ kohärent ist und daß die kanonische Abbildung

$$f^* f_*(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$$

surjektiv ist. Dann gibt es eine und nur eine Abbildung

$$i_{\mathcal{L}} : X \to P(\mathcal{E})$$

derart daß $\mathcal{L} \approx i_{\mathcal{L}}^*(\mathcal{O}_{P(\mathcal{E})}(1))$ gilt.

A.4. Ample, sehr ample, projektiv.

Mit obigen Bezeichnungen wird eine Garbe $\mathcal{L} \in \mathrm{Inv}\, \mathcal{O}_X$ sehr ample bezüglich f genannt, wenn die Abbildung $f^* f_*(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$ surjektiv ist und $i_{\mathcal{L}}$ eine Einbettung ist.

Man sagt, daß $\mathcal{L}$ ample bezüglich f ist, wenn für jeden Punkt $x \in S$ eine offene Umgebung U und eine natürliche Zahl $n > 0$ existiert, derart daß $\mathcal{L}^{\otimes n}|_{f^{-1}(U)}$ sehr ample bezüglich $f|_U : f^{-1}(U) \to U$ ist.

Ein Morphismus $f : X \to S$ wird projektiv genannt, wenn ein Modul $\mathcal{L} \in \mathrm{Inv}\, \mathcal{O}_X$ existiert, der sehr ample bezüglich f ist.

Im "absoluten" Fall (d.h. $S = p_o$) sagt man ample oder sehr ample, statt ample oder sehr ample bezüglich $X \to p_o$.

Satz [SC]. Sei $f : X \to S$ ein platter, eigentlicher Morphismus, $\mathfrak{L} \in \operatorname{Inv} \mathfrak{O}_X$ und $s \in S$ derart, daß die Garbe $\mathfrak{L}|_{\underline{m}_s \mathfrak{L}} \in \operatorname{Inv} \mathfrak{O}_{X_s}$ sehr ample ist und $H^1(X_s, \mathfrak{L}|_{\underline{m}_s \mathfrak{L}}) = 0$ gilt. Dann existiert eine Umgebung U von s derart, daß $\mathfrak{L}|_{f^{-1}(U)}$ sehr ample bezüglich $f|f^{-1}(U)$ ist und $f_*(\mathfrak{L})$ frei auf U ist.

Sei X_o eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, D ein Divisor auf X_o. Dann gilt:

a) Ist grad $D \geq 2g+1$, so ist $\mathfrak{O}_{-D}$ ample ([S]).

b) Ist grad $D < -2(g-1)$, so ist $H^1(X, \mathfrak{O}_D) = 0$ ([F], [G]).

Sei K die kanonische Klasse; dann ist Ω (nach dem Dualitätssatz) mit $\mathfrak{O}_{-K}$ isomorph und deshalb $\Omega^{\otimes n}$ mit $\mathfrak{O}_{-n \cdot K}$.

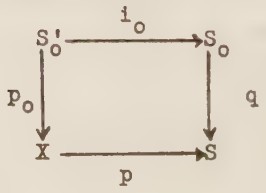
Wegen grad $(n \cdot K) = n \cdot \text{grad}(K) = n \cdot 2 \cdot (g-1)$ folgt aus dem oben Gesagten und aus dem obigen Satz:

Korollar. Sei $f : X \to S$ eine Kurve vom Geschlecht g und $\Omega := \Omega^1_{X/S}$. Dann gilt:

a) Ist $g = 2$, so ist $\Omega^{\otimes n}$ sehr ample bezüglich f für $n \geq 3$.

b) Ist $g \geq 3$, so ist $\Omega^{\otimes n}$ sehr ample bezüglich f für $n \geq 2$.

B.1. Sei



ein kommutatives Diagramm in $\underline{An}$, wobei p einfach ist und S_o' ein von einem Ideal $J \subset \mathrm{Coh}\, \mathcal{O}_{S_o}$ mit der Eigenschaft $J^2 = 0$ definierter abgeschlossener Unterraum von S_o ist. Mit $E(p_o)$ bezeichnet man die Menge aller S-Morphismen $S_o \to X$, die p_o fortsetzen. Sei $\mathfrak{G}$ die Garbe $p_o^*(\sigma_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_o'}} J \approx$ $\approx \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{S_o'}}(p_o^*(\Omega^1_{X/S}), J)$ (J ist auf kanonische Weise ein $\mathcal{O}_{S_o'}$-Modul, da $J^2 = 0$), wobei $\sigma_{X/S}$ die $\underline{\text{Tangentialgarbe}}$ $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_S)$ von X bezüglich S ist. Dann gilt:

$\underline{\text{Satz 1.}}$ [SC] Es gibt eine bijektive Abbildung von $E(p_o)$ auf $H^0(S_o', \mathfrak{G})$.

$\underline{\text{B.2.}}$ Sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p'} & S' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

ein kartesisches Quadrat in $\underline{An}$, wobei p einfach ist und S' ein von einem Ideal $J \subset \mathrm{Coh}\, \mathcal{O}_S$ mit der Eigenschaft $J^2 = 0$ definierter abgeschlossener Unterraum von S ist.

Mit $E(X')$ bezeichnet man die Menge aller Äquivalenzklassen $(\tilde{X}, \tau)$, wobei $\tilde{X}$ ein einfacher analytischer Raum über S ist und $\tau : X' \xrightarrow{\sim} \tilde{X} \times_S S'$ ein Isomorphismus ist bezüglich der Isomorphierelation von Paaren im üblichen Sinne. Sei $\mathfrak{G}$ die Garbe $i^*(\sigma_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} J \cdot \mathcal{O}_X$. Dann gilt:

Satz 2. [SC] Wenn $H^2(X',\mathcal{G}) = 0$ gilt, dann ist $E(X')$ mit $H^1(X',\mathcal{G})$ isomorph.

Bemerkung. Statt σ_{X/p_o} schreibt man σ_X.

C.

Satz. Sei $p = X \to S$ ein einfacher, eigentlicher Morphismus. Für jedes $s_o \in S$ existiert eine offene Umgebung V von s_o und ein V-Homöomorphismus $p^{-1}(V) \cong V \times p^{-1}(s_o)$. Dieser Homöomorphismus kann C^∞-differenzierbar gewählt sein.
(Zum Beweis siehe z.B. [K].)

D. Über die Darstellbarkeit. [SC]
Sei $\underline{C}$ eine Kategorie mit Faserprodukten.

D.1. Sei $F : \underline{C}^o \to \underline{Ens}$ ein Funktor; F heißt darstellbar, wenn ein Paar (X,α) existiert, wobei $X \in Ob\ \underline{C}$ und $\alpha : h_X \to F$ ein Isomorphismus von Funktoren ist.
α ist durch das Element $\xi := \alpha(X)(1_X) \in F(X)$ definierbar.
X ist bis auf einen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Das Paar (X,ξ) heißt "darstellendes Paar" für F. Als Abkürzung werden wir folgende Sprechweise benützen: F ist durch X dargestellt.

Wir geben jetzt zwei einfache Beispiele, die wir im vierten Paragraphen benützen.

D.2. Beispiele.

1) Sei $X \to S$ ein eigentlicher Morphismus von komplexen Räumen, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in Coh\ \mathcal{O}_X$, $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln und $\mathcal{G}$ platt über S.

Dann ist der Funktor $L : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$

$$L(T) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } u_T \text{ kein Isomorphismus ist} \\ \{1\} & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellbar durch eine offene Menge von S, und zwar durch $S_1 = S - f(\mathrm{Supp}(\ker u) \cup \mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\, u))$.

In der Tat, $\mathrm{Hom}_S(T,S_1)$ besteht aus einem Element (äquivalent: ist nicht die leere Menge) genau dann, wenn T über S_1 liegt. Man bemerkt:

a) $\mathrm{Supp}((\mathrm{coker}\, u)_T) = p_X^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\, u))$, wobei $p : T \to S$ der Morphismus ist, der T über S definiert.

b) $\mathrm{Supp}((\ker u)_T) = p_X^{-1}(\mathrm{Supp}(\ker u))$, da $\mathcal{O}$ S-platt ist.

Nach Definition von L ist $L(T)$ nicht die leere Menge genau dann, wenn $p_X^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\, u))$ und $p_X^{-1}(\mathrm{Supp}\,(\ker u))$ leere Mengen sind, d.h. genau dann, wenn $p(T) \subset S_1$ gilt.

2) Die offene Menge $Gl(r,\underline{\mathbb{C}})$ aus $\underline{\mathbb{C}}^{r^2}$ stellt den Funktor:

$\underline{Gl}_r : \underline{An}^\circ \to \underline{Ens} : \underline{Gl}_r(X,\mathcal{O}_X) := Gl(r,\mathcal{O}_X)$ dar. Offensichtlich ist $Gl(r,\underline{\mathbb{C}})$ eine Gruppe in der Kategorie $\underline{An}$.

D.3. Seien $F, G : \underline{C}^o \to \underline{Ens}$ Funktoren, $u : F \to G$ ein funktorieller Morphismus, und $S \in \mathrm{Ob}(\underline{C})$.
Für jedes $\eta \in G(S)$ ist auf kanonische Weise ein Funktor

$$F_\eta : (\underline{C}/S)^o \to \underline{Ens}$$

definiert wie folgt: Für jedes Objekt T von $\underline{C}/S$ (d.h. für jeden Morphismus $p : T \to S$) sei $F_\eta(T) := \{\xi \in F(T) : u(T)(\xi) = G(p)(\eta)\}$.

Für Morphismen sei F_η die durch F induzierte Zuordnung.

Man sagt, daß u darstellbar ist oder daß F darstellbar bezüglich u ist, wenn für jedes Objekt S von $\underline{C}$ und jedes $\eta \in G(S)$ der Funktor F_η darstellbar ist.

Satz 1. Sei $u : F \to G$ wie oben; wenn G darstellbar ist, dann gilt: F ist genau dann darstellbar, wenn u darstellbar ist.

In diesem Fall seien $\alpha : h_X \cong F$, $\beta : h_Y \cong G$ und $f : X \to Y$ derart, daß das Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{h(f)} & h_Y \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ F & \xrightarrow{u} & G \end{array}$$

kommutativ ist.

Man sagt, daß f den Morphismus u darstellt.

Anwendung:

Satz 2. Seien $F, G : (\underline{An}/S)^o \to \underline{Ens}$ zwei Funktoren und $u : F \to G$ ein funktorieller Morphismus. Sei G durch ein Objekt Y darstellbar.

F ist durch den komplexen Raum X darstellbar und der S-Morphismus $f : X \to Y$, der u darstellt, ist eine offene Einbettung genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $u(T)$ ist ein Monomorphismus für jedes $T \in Ob(\underline{An}/S)$.

b) Für jedes $T \in Ob(\underline{An}/S)$ und jedes $\eta \in G(T)$ ist die Menge:

$T_\eta := \{t \in T : G(i_t)(\eta) \in Bild(u(p_o))\}$ offen.

c) Wenn $T_\eta = T$ ist, dann ist $\eta \in Bild(u(T))$.

D.4. Man stellt jetzt die Frage: "Wenn F darstellbar ist, unter welchen Bedingungen ist G darstellbar?"

Dazu einige Definitionen [SB], [SC]:

1) Ein Morphismus $f : X \to Y$ aus der Kategorie $\underline{C}$ heißt ein effektiver Epimorphismus, wenn das Diagramm

$$X \underset{Y}{\amalg} X \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \quad \text{exakt ist.}$$

2) Ein Morphismus f wie oben heißt ein universell-effektiver Epimorphismus, wenn für jeden Morphismus $Y' \to Y$ von $\underline{C}$ der kanonische Morphismus $X \underset{Y}{\amalg} Y' \to Y'$ ein effektiver Epimorphismus ist.

3) Seien X, Y zwei Objekte von $\underline{C}$; $X \xrightarrow{f} Y$ heißt ein Morphismus von H-effektiven "Descente", wenn $X \underset{Y}{\amalg} X$ existiert und das Diagramm:

$$H(Y) \xrightarrow{H(f)} H(X) \underset{H(pr_2)}{\overset{H(pr_1)}{\rightrightarrows}} H(X \underset{Y}{\amalg} X)$$

exakt ist.

4) Man sagt, daß ein Paar von Morphismen $p_1, p_2 \in Hom_{\underline{C}}(R,X)$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert, wenn für jedes Objekt T von $\underline{C}$ das Bild der Abbildung:

$Hom(1_T,p_1) \times Hom(1_T,p_2) : Hom(T,R) \to Hom(T,X) \times Hom(T,X)$

eine Äquivalenzrelation auf die Menge $Hom(T,X)$ definiert.

Eine solche Äquivalenzrelation wird effektiv genannt, wenn ein effektiver Epimorphismus $f : X \to Y$ existiert, derart daß die kanonische Abbildung $(p_1,p_2) : R \to X \underset{Y}{\times} X$ ein Isomorphismus ist. Das Paar (Y,f) ist bis auf einen Isomorphismus eindeutig bestimmt; statt Y schreibt man X/R.

5) Man sagt, daß ein Funktor $H : (\underline{An}/S)^0 \to \underline{Ens}$ ein Funktor von lokaler Natur (oder ein LN-Funktor) ist, wenn für jedes Objekt T aus $\underline{An}/S$ die auf T definierte Prägarbe $U \to H(U)$ eine Garbe ist (U durchläuft die offenen Mengen von T).

D.5. Eine Antwort auf die in D.4 gestellte Frage gibt der folgende Satz:

Satz: Seien $F,G : \underline{C}^0 \to \underline{Ens}$ und $u : F \to G$ wie in D.3. Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet man eine für Basiswechsel stabile Klasse von effektiven Epimorphismen von $\underline{C}$. Sei F durch ein Objekt X darstellbar, und u ist durch einen Morphismus aus $\mathfrak{S}$ darstellbar.

Die folgenden beiden Behauptungen sind äquivalent:

(i) G ist durch ein Objekt Y darstellbar und u durch einen Morphismus $X \to Y$ aus $\mathfrak{S}$.

ii) Die folgenden Bedingungen sind erfüllt:

a) Für jedes S aus $\underline{C}$ und jedes $\xi \in G(S)$ ist der Funktor $F_\xi : (\underline{C}/S)^0 \to \underline{Ens}$ durch ein Objekt T darstellbar, derart daß der Morphismus $T \to S$, der T als Objekt von $\underline{C}/S$ definiert, zu $\mathfrak{S}$ gehört.

b) Für jedes $Z \to W$ aus $\mathfrak{S}$ ist das Diagramm

$$G(W) \to G(Z) \rightrightarrows G(Z \underset{W}{\times} Z)$$

exakt in $\underline{Ens}$.

c) Der Funktor $F \overset{\sqcap}{G} F : \underline{C}^{o} \to \underline{Ens}$ ist durch ein Objekt R darstellbar und die kanonischen Abbildungen $R \rightrightarrows X$ definieren eine effektive Äquivalenzrelation auf X, derart daß die Abbildung $X \to X/R$ zu $\in$ gehört.
(Diese letzte Abbildung stellt u dar!)

D.6. Für die LN-Funktoren ist die Darstellbarkeit eine "lokale" Eigenschaft; genauer findet man:

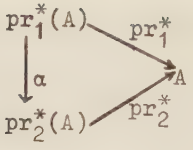
Satz. [SC] Für einen Funktor $F : (\underline{An}/S)^{o} \to \underline{Ens}$ und eine offene Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ von S sind die folgenden Behauptungen äquivalent:

(i) F ist darstellbar;
(ii) F ist ein LN-Funktor und die Beschränkung von F auf S_i (d.h. $F_i := F \cdot a_i^{o}$, wobei $a_i^{o} : (\underline{An}/S_i)^{o} \to (\underline{An}/S)^{o}$ als Basiswechsel interpretierbar ist) ist darstellbar für alle $i \in I$.

E. Seien $\underline{A}$ eine $\underline{C}$ gefaserte Kategorie und $f : X \to S$ ein Morphismus von $\underline{C}$ derart, daß die Folge

$$X \underset{S}{\sqcap} X \underset{\overset{pr_2}{\longrightarrow}}{\overset{pr_1}{\longrightarrow}} X \to S \quad \text{exakt ist.}$$

Der Morphismus f heißt ein Morphismus von striktem "Descente", wenn für jedes Paar (A,α), wobei $A \in \underline{A}_X$ ist und $\alpha : pr_1^{*}(A) \xrightarrow{\sim} pr_2^{*}(A)$ ein Isomorphismus ist, ein Paar (B,φ) existiert, derart daß $\varphi : A \to B$ über f liegt und B der induktive Limes des Diagramms:



ist (d.h. es gilt $\beta \cdot pr_1^* = \beta \cdot pr_2^* \cdot \alpha$ und für jeden Morphismus $\delta : A \to C$ mit den Eigenschaften:

a) δ liegt über f

b) $\delta\, pr_1^* = \delta \cdot pr_2^* \cdot \alpha$

existiert genau ein Morphismus $B \overset{\eta}{\to} C$ in $\underline{A}$ mit $\eta \cdot \beta = \delta$).

L I T E R A T U R

[A] L. Ahlfors,"On quasiconformal mappings", J.Analyse Math. 3, 1953/54.

[AB] L. Ahlfors and L. Bers,"Riemann's mapping theorem for variable metrics", Ann. of Math. 72, 1960.

[AF1] L. Ahlfors,"The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces",Analytic Functions. Princeton Univ. Press, 1960.

[AF2] L. Bers,"Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem", Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960.

[AS] L. Ahlfors and L. Sario, "Riemann surfaces", Princeton Univ. Press, 1960.

[B] L. Bers, "Uniformization and moduli", Contribution to function theory, TATA Institute, Bombay, 1960.

[B1] L. Bers, "Simultaneous uniformization", Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960.

[B2] L. Bers,"Spaces of Riemann surfaces as bounded domains", Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960.

[D] A. Douady,"Le Problême des Modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné", Ann. Inst. Fourier 16, 1966.

[F] O. Forster, "Riemannsche Flächen", Univ. München, 1968.

[FAC] J.P. Serre, "Faisceaux algebriques coherents", Ann. of Math. 61, 1955.

[FB] N. Steenrod, "The topology of Fibre Bundles", Princeton Univ. Press, 1951.

[G] R.C. Gunning, "Lectures on Riemann surfaces", Princeton Univ. Press, 1966.

[K] M. Kuranishi, "A note on families of complex structures", Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, Univ. of Tokyo Press, 1969.

[M] W. Mangler,"Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich", Math. Zeitschrift 44, 1939.

[R] H.E. Rauch, "Variational methods in the moduli of Riemann surfaces", Contribution to function theory, TATA Institute, Bombay, 1960.

[SB] A. Grothendieck, "Techniques de construction et theoremes d'existence en geometrie algebrique" (I-IV), Sem. Bourbaki 12, 1959/60; 13 1960/61.

[SC] A. Grothendieck, "Techniques de construction en geometrie analytique" (I-X), Sem. Cartan 13, 1960/61.

[ST] K. Stein, "Analytische Zerlegungen komplexer Räume", Math. Annalen 132, 1956.

[T1] O. Teichmüller, "Extremale quasiconforme Abbildungen und quadratische Differentiale", Preuss. Akad. 22, 1940.

[T2] O. Teichmüller, "Bestimmung der extremalen quasiconformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen", Preuss. Akad. 4, 1943.

[T3] O. Teichmüller, "Veränderliche Riemannsche Flächen", Deutsche Math. 7, 1944.

[W] H. Weyl, "Die Idee der Riemannschen Flächen", Teubner, 1913.

L E B E N S L A U F

Am 2. Februar 1944 wurde ich als Sohn des Dipl.-Ingenieurs Şerban Duma und seiner Ehefrau Ada, geborene Joan, in Petroşani (Rumänien) geboren.

Vom Herbst 1950 bis Sommer 1954 besuchte ich in Bukarest die Volksschule und anschließend das Gymnasium; nach dem Abitur (Sommer 1961) studierte ich an der Universität Bukarest Mathematik und legte dort im Sommer 1966 das Diplom und Staatsexamen ab.

Vom 1. September 1966 bis 26. September 1969 war ich als Forscher am Mathematischen Institut der rumänischen Akademie beschäftigt. In dieser Zeit habe ich ein paar Arbeiten veröffentlicht.

Seit 1. Oktober 1969 bin am Mathematischen Institut der Universität München tätig; zuerst als Humboldt-Stipendiat und nachher - ab Sommersemester 1971 - als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle.